

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА как содержательно- методическая линия школьного курса математики

Докладчик: Шабанова Мария Валерьевна
(САФУ имени М.В.Ломоносова)

Рождение термина «Экспериментальная математика»



Николай Николаевич
Красовский, академик
7.09.1924 - 4.04.2012

Термин впервые произнесен на открытии Уральского научного центра АН СССР (реш.1969).

- Популяризатором его выступал Н.Н. Красовский - дир. Института математики и механики УНЦ АН СССР (с 1970-1977гг), основоположник идей информатизации математического образования;
- В математическом образовании использовал Георгий Борисович Шабат «Клуб экспериментальной математики» (с 1983 г.)

Экспериментальная математика

- **Новый бренд математики**, подчеркивающий «выход из подполья» экспериментального подхода в математике.
- **Новый раздел математической науки**, специфика которого состоит в широком использовании возможностей компьютерной техники для постановки задач, получения и верификации гипотез, проведения компьютерных доказательств, визуализации математических фактов.
- **Новая методология математической деятельности**, получившая распространение во многих областях математической науки в связи с появлением автоматизированных систем поддержки научных исследований, программ постановки и проведения компьютерных экспериментов.

Элементы гносеологического цикла экспериментальной математики

Этап докомпьютерного
решения исследовательской
задачи



Постановка задачи как математической
исследовательской

Обоснование необходимости привлечения
компьютерного эксперимента

Этап компьютерного решения
исследовательской задачи



Выбор или создание ПО, создание
виртуальной модели объекта исследования,
средств регистрации данных эксперимента

Проведение компьютерного эксперимента

Анализ данных, получение выводов

Этап послекомпьютерного
решения исследовательской
задачи



Использование результатов компьютерного
эксперимента для дальнейшего решения
задачи

Использование виртуальной модели для
развития идеи задачи, постановки новых
задач.

Средства экспериментальной математики для науки и образования

Cabri, 1986

The Geometer's Sketchpad, 1989

GeoNexT, 1999

Живая математика, 2002

Математический конструктор, 2006

GeoGebra, 2002

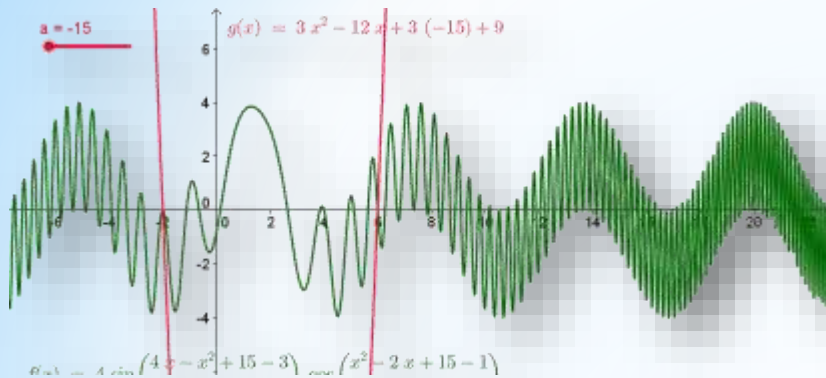
Geometry Expressions, 2008

более 50 видов

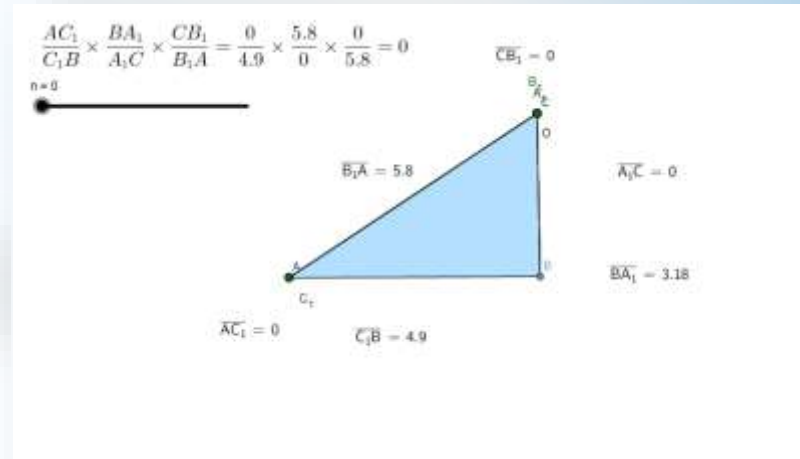


Geometry Expressions Demo

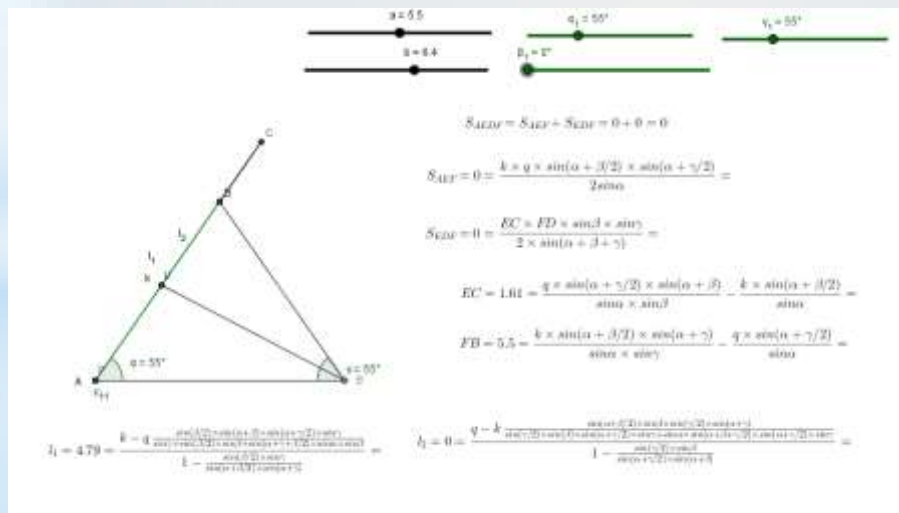
Возможности систем динамической математики



Конструирование виртуальных динамических моделей объектов исследования



Проведение разведочных и контрольных экспериментов



Контроль расчетов и аналитических выкладок

Проекты ЕС



Инновации в математическом образовании на европейском уровне



Проект Фибоначчи



Проект DynaMAT

Проекты ЕС

Inquiry-Based Mathematics Education



Проект Математика и наука для жизни



Проект Ключевые компетенции в математическом образовании

Международный проект «Методики и информационные технологии в образовании»



Координаторы проекта
MITE:
проф. Гроздев С.И.



проф. Сергеева Т.Ф.

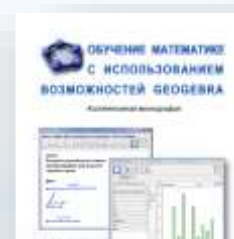
Цели:

- Оценка эффектов и рисков обучения математике с использованием DGS.
- Разработка технологии эффективного использования DGS.
- Разработка и апробация электронных образовательных ресурсов и учебно-методических материалов исследовательского обучения с ИГС.

Исследовательская группа Архангельской области



Министерство образования и науки
Российской Федерации



29 школ,
49 учителей,
824 учащихся

Основные эффекты и риски применения методологии и средств экспериментальной математики в массовой школе

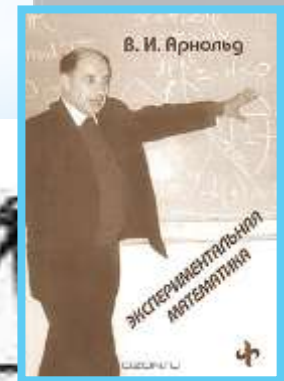
Эффект	Риск
1. Обогащение стиля математического мышления учащихся методами экспериментальной математики	Деформация стиля математического мышления за счет снижения потребности к теоретическому поиску, к использованию логических приемов для постановки новых задач на базе решенных.
2. Расширение математического кругозора учащихся	Снижение потребности в дедуктивных обоснованиях утверждений, введенных посредством динамической визуализации .
3. Повышение наглядности в обучении математике	Задержка развития визуального мышления учащихся при широком использовании готовых компьютерных визуализаций
4. Повышении доступности исследовательской деятельности в математике	Задержка развития исследовательских умений при использовании динамических рабочих листов не соотнесенных с уровнем геометрической подготовки учащихся

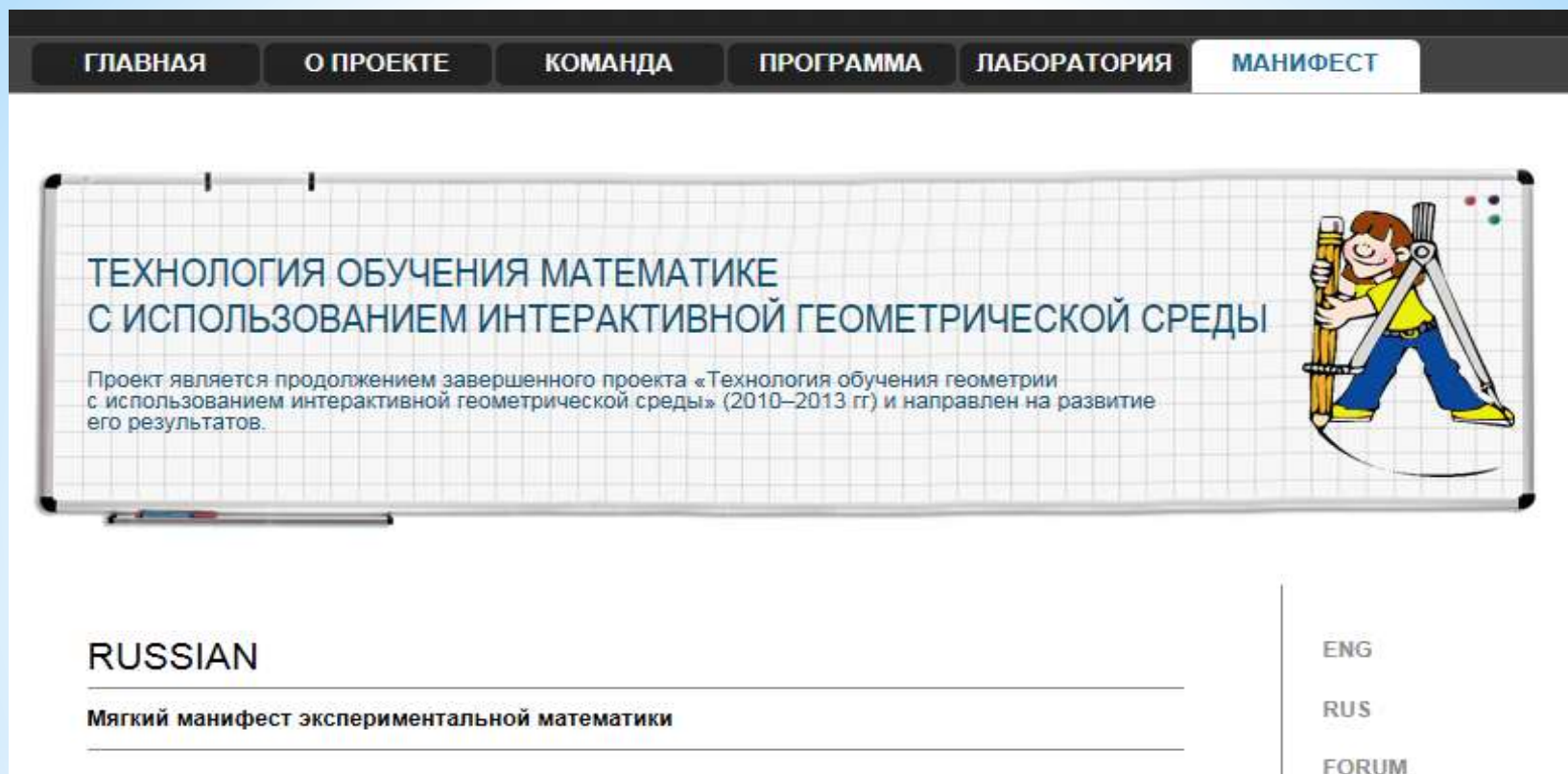
Риск экспериментально-теоретического разрыва (Experimental-theoretical gap)

Учащиеся ошибочно полагают, что подтверждение факта компьютерным экспериментом вполне убедительно и не видят необходимости проведения дедуктивных доказательств.

Учителя считают, что от обучения дедуктивным доказательствам учащихся массовой школы можно отказаться в пользу экспериментального подхода.

Риск отмечают: Chazan, 1993, Mason, 1993; Hanna, 2000; Pandiscio, 2002, Christou+ 2004, Mariotti, 2006, Kondratieva, 2013 и др..





<http://itprojects.narfu.ru/mite/manifest.php>

Профилактика возникновения экспериментально-теоретического разрыва состоит в долговременном и целенаправленном воспитании у учащихся не только умений, но и мировоззрения математика - экспериментатора. *Основой его является убеждение, что любое наблюдение, даже над самыми простыми объектами, нуждается в теоретическом осмыслении.*

[Типология](#)

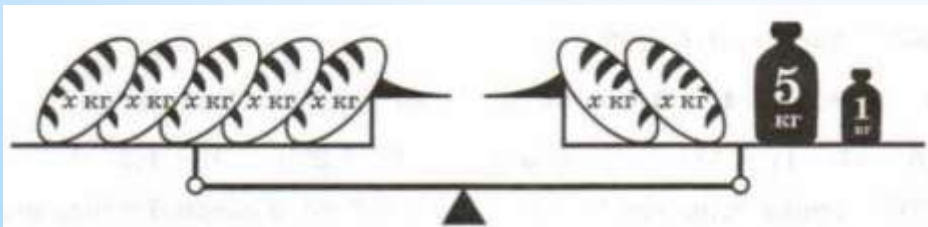
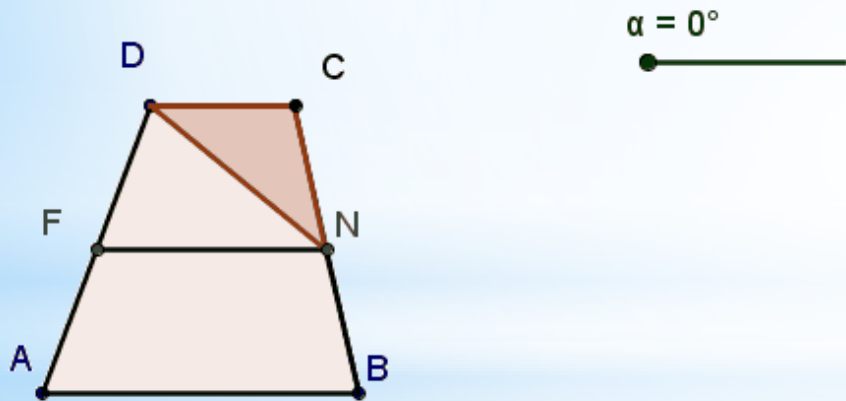
Перечень основных положений

1. Понятие «содержательно-методической линии» школьного курса математики: определение, виды (А.Я.Блох, В.Л.Гончаров, Е.И.Лященко, В.А.Тестов и др.).
2. Задачи (отбор, логика и степень выявления, связи) и принципы проектирования частично-выявленных содержательно-методологических линий (А.Я.Блох, Е.И.Лященко, М.В.Шабанова).

[Подробнее](#)

Понятие линии экспериментальной математики

Под **линией экспериментальной математики** мы предлагаем понимать частично-выявленную содержательно-методологическую линию школьного курса математики, ведущим понятием которой является понятие *математического эксперимента*.



Начальная школы (1-4 классы)

Цель. Формирование базовых умений, связанных с реализацией экспериментального подхода в ходе изучения математики

Начало этапа

Неспецифическое содержание – задания на пересчет предметов, сравнение и измерение величин, арифметические вычисления.

Специфическое содержание – «натурные» эксперименты бэконовского типа (эксперименты в естественных условиях, «Что произойдет, если сделать так ?»).

Результаты

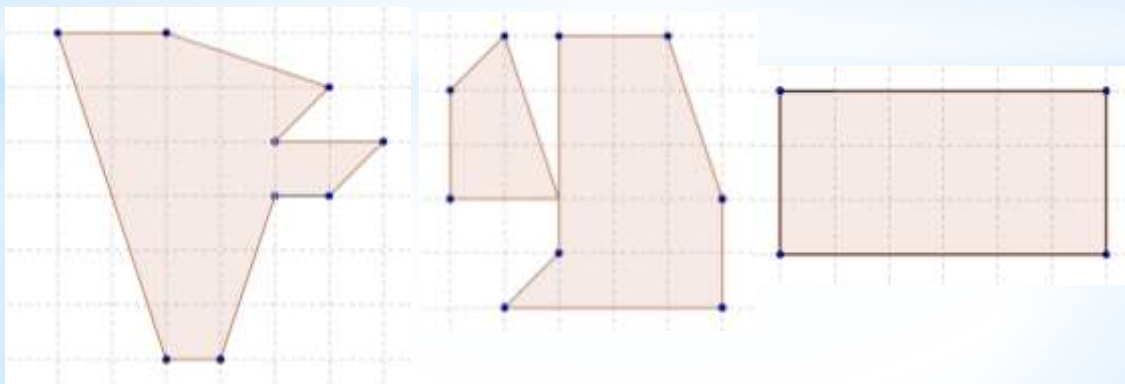
- 1) способность подмечать закономерности при выполнении одних и тех же заданий с объектами разной природы, абстрагируясь от их природы;
- 2) способность видеть причины сходства и различия результатов одних и тех же практических действий в, казалось бы, сходных условиях и использовать их для рационализации рутинных действий.

Примеры заданий для линии в начальной школе

Пример 1 (счет с переходом через десяток).

Решите примеры: а) $8 + 3$; б) $7 + 5$; в) $3 + 8$; г) $2 + 9$;
д) $4 + 17$; е) $5 + 16$. Как можно было сэкономить время
при их решении?

**Пример 2. Найдите площади фигур, которые
изображены на рисунке. Как это сделать наиболее
быстро и точно?**



Начальная школы (1-4 классы)

Цель. Формирование умений, связанных с реализацией экспериментального подхода в ходе изучения математики

Конец этапа

Неспецифическое содержание – введения правил математических действий, которые на первый взгляд кажутся искусственными, изучение измерительных и конструктивных инструментов.

Специфическое содержание – «натурные» эксперименты аристотелевского типа (лабораторные эксперименты).

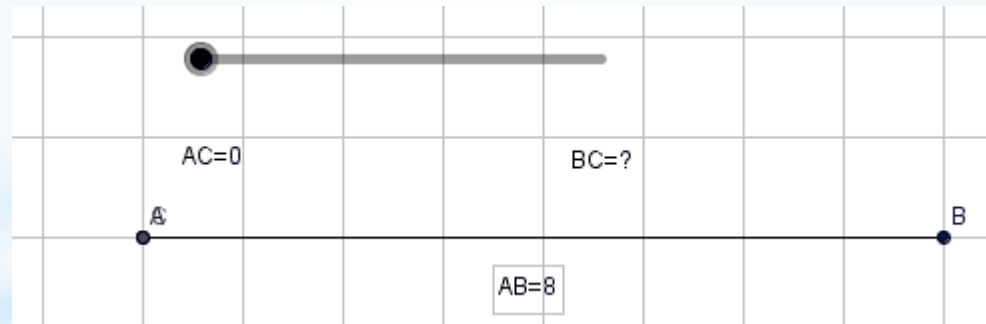
Результаты (частично-выявленные)

- 1) способность создавать вещественные модели изучаемых математических объектов, формировать репрезентативную выборку, формулировать цель эксперимента, планировать его ход, делать выводы на основе экспериментальных данных, применяя при этом метод индукции, распространять выводы о свойствах на оригинал.
- 2) Понимание терминов: эксперимент, таблица данных, модель и т.п.
- 3) Знания о видах интерпретационных моделей и соответствующих методах: origami, разрезания, взвешивание, наложение и т.п.
- 4) Представление о роли экспериментов: разведка, проверка, объяснение, оправдание.

Примеры заданий для линии в начальной школе

Пример 3. Придумайте правило нахождения неизвестного слагаемого x , т.е. $a + x = b$, где a - известное слагаемое; b - известная сумма.

Для этого проведите эксперимент. Представьте, что $b=AB$, $a=AC$, $x=DC$. Постройте AB произвольно выбранной длины. Изменяйте отрезок AC , заполняя таблицу. Придумайте, как найти BC не измеряя его. Проверьте свои выводы измерениями.



AB(b)	8	8	8	8	8
AC (a)				...	...
BC (x)					

Примеры заданий для линии в начальной школе

Пример 4. Придумайте, как использовать детские качели – качалки, для того чтобы методом эксперимента

- 1) сравнивать массы детей, на них качающихся;
- 2) сравнивать длины плеч самой качели (если они регулируются);
- 3) решать задачи на определения отношения, в котором точка делит отрезок.



Основная школа (5-9 классы)

Цель: Формирование обобщенных представлений об экспериментальном и теоретическом подходах к исследованию, видах экспериментов и специфике компьютерных экспериментов.

Начало этапа (5-6 классы)

Неспецифическое содержание – расширение понятия числа, введение буквенного обозначение числа, пропедевтика функциональных зависимостей, начала комбинаторики и теории вероятностей, приближенные вычисления.

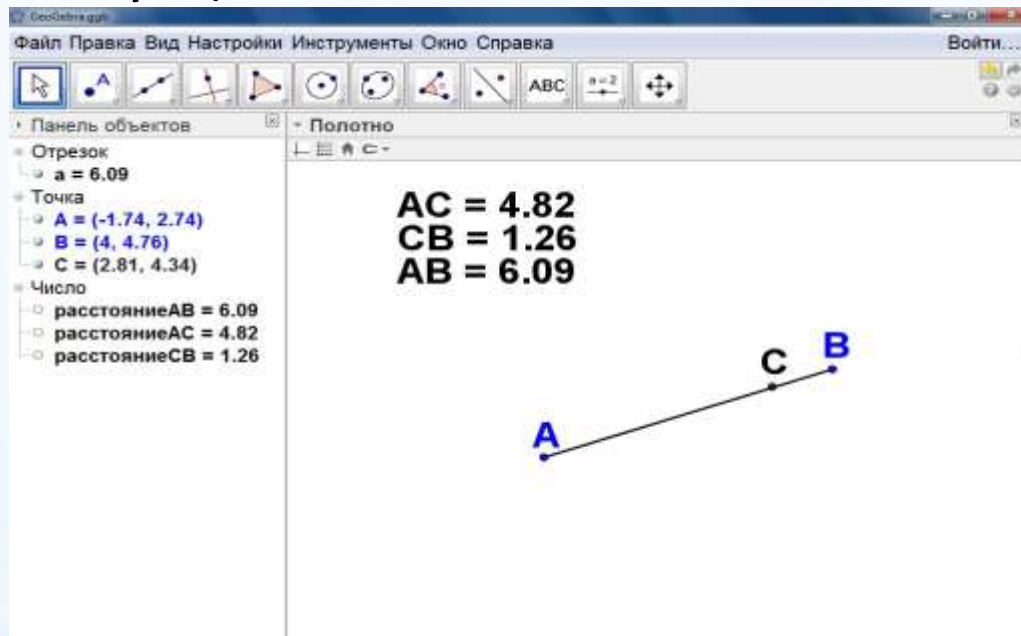
Специфическое содержание – модельные эксперименты с типовыми вещественными моделями (игральная кость, урна с шарами), интерпретациями (дерево вариантов, график, диаграмма, геометрическая фигура), компьютерные эксперименты

Результаты:

- 1) Критическое отношение к результатам экспериментов, потребность в теоретическом осмыслении экспериментальных данных.
- 2) Знания о приближенности экспериментальных данных, причинах появления приближенных значений, систематических и случайных ошибках экспериментов, зависимость надежности выводов от массовости данных.
- 3) Умения делать вывод, адекватные собранным экспериментальным данным, теоретически осмысливать их.

Примеры заданий для основной школы

Пример 5. В ходе компьютерного эксперимента была обнаружена следующая ситуация:

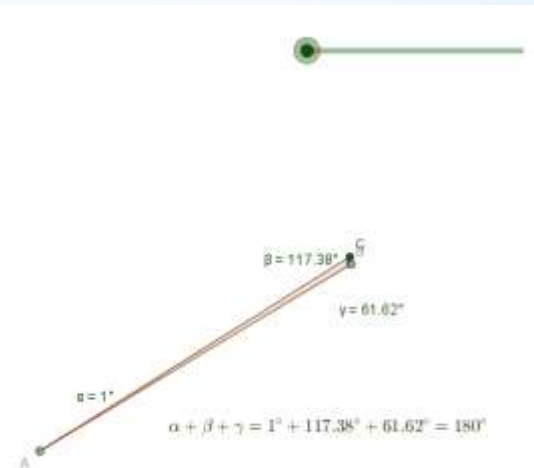
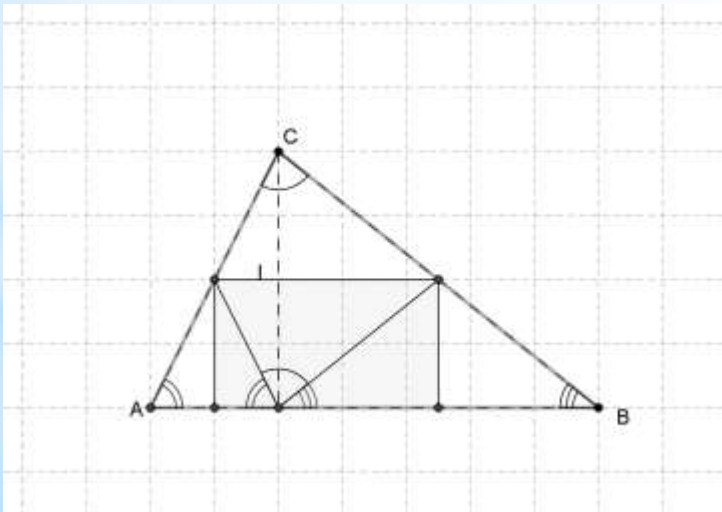


Какой из выводов является правильным:

- 1). На отрезке АВ можно найти такое положение точки С, при котором $AC + CB \neq AB$.
- 2). Неравенство $AC + CB \neq AB$, является следствием неточности измерения.
- 3) Неравенство $AC + CB \neq AB$, является следствием округления данных о величинах отрезков?

Примеры заданий для основной школы

Пример 6. Исследуйте, зависимость суммы углов треугольника от его формы и размеров тремя методами: 1) методом измерения; 2) методом оригами; 3) компьютерным экспериментом. К одинаковым ли выводам привели вас все три эксперимента? Какой из экспериментов позволил получить более надежные выводы? Почему?



Основная школа (5-9 классы)

Цель: Формирование обобщенных представлений об экспериментальном и теоретическом подходах к исследованию, видах экспериментов и специфике компьютерных экспериментов.

Продолжение этапа (7-9 классы)

Неспецифическое содержание – геометрия, функции и графики, задачи с параметрами, элементы теории вероятностей и статистики и т.п.

Специфическое содержание – эксперименты с вещественными моделями и компьютерные эксперименты, мысленные эксперименты.

Результаты:

- 1) Представление о компьютерном эксперименте, как разновидности модельного эксперимента, о систематическом характере погрешностей компьютерного эксперимента;
- 2) Формирование умений рационально сочетать экспериментальный и теоретический подходы.
- 3) Умение экспериментировать не только с вещественными или компьютерными моделями, но и с образами математических объектов.

Примеры заданий для основной школы

Пример 7. Как определить вид треугольника?

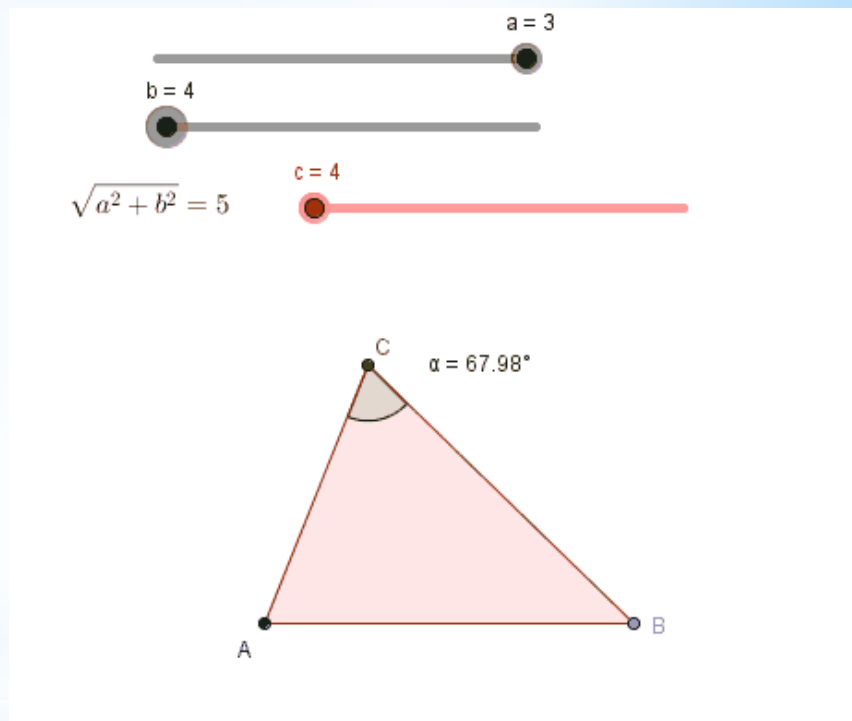
Цель. Сформулировать признак вида треугольника

Постановка проблемы. Мы знаем теорему Пифагора: Если треугольник со сторонами a , b и c прямоугольный с c - наибольшая сторона, то $a^2 + b^2 = c^2$. Верно ли обратное утверждение?

Какой вид имеет треугольник, если $a^2 + b^2 > c^2$ or $a^2 + b^2 < c^2$, ($a \leq b \leq c$)?

Задание. Постройте динамическую модель. Зафиксируйте a и b .

Меняйте c . Наблюдайте за изменением угла C . Найдите интервал значений c , при которых ABC - остроугольный; ABC - тупоугольный; ABC - прямоугольный треугольник.



Примеры заданий для основной школы

Пример 8. Правило равносильного преобразования уравнений:

$$A(x) + c = B(x) + c \leftrightarrow A(x) = B(x)$$

Цель: проверить справедливость правила.

Задание: Постройте динамическую модель. Выберите значение c . Найдите перебором корни уравнений, меняя значение x . Запишите результат. Измените значение c . Снова найдите перебором корни уравнений. Проведите эксперимент несколько раз. Сделайте вывод.

$$x = -5$$



$$\sqrt{(x+1)^2} = |1-2x|$$

$$4 = 11$$

$$c = -1.9$$

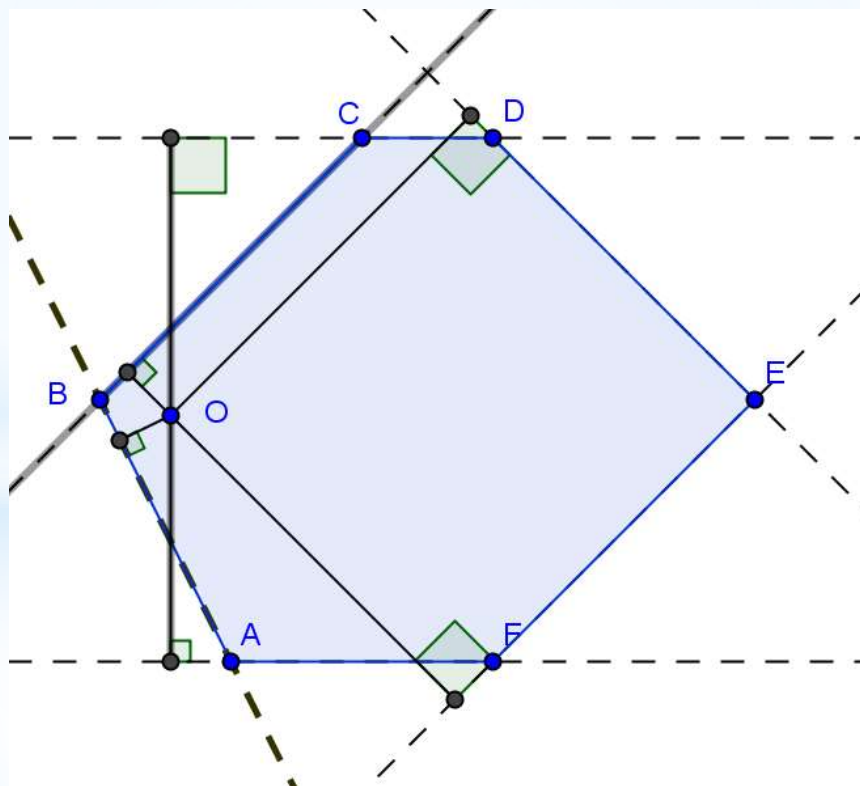


$$-1.9 + \sqrt{(x+1)^2} = -1.9 + |x+1|$$

$$2.1 = 9.1$$

Примеры заданий для основной школы

Пример 9. Придумайте физический эксперимент, позволяющий выяснить, существует ли многоугольник и такая точка внутри него, из которой перпендикуляры, проведенные ко всем его сторонам, попадают только на продолжения сторон.



Старшая школа (10-11 классы)

Цель: Распространение мысленных экспериментов на новые области, развитие знаний о роли компьютерных экспериментов в поддержке мысленного экспериментирования и выхода за границы возможностей, определенных уровнем теоретической подготовки.

Неспецифическое содержание - стереометрия, начала математического анализа (работа с абстракциями актуальной и потенциальной бесконечности), элементы математической статистики, задачи этих разделов, неразрешимые на уровне общего образования.

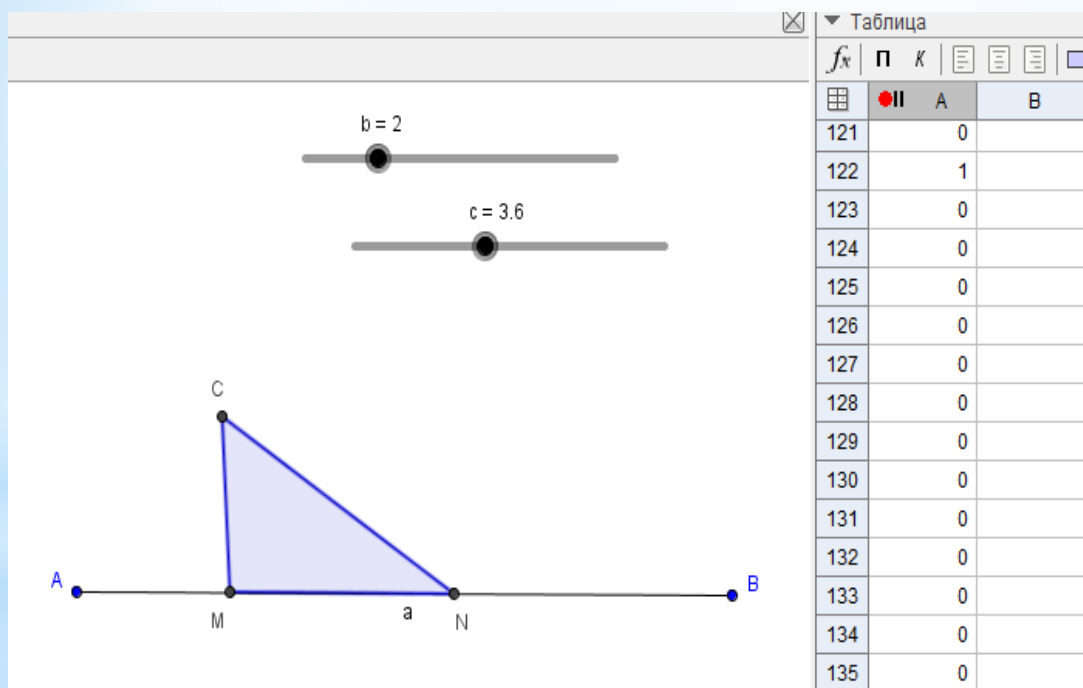
Специфическое содержание - мысленные и компьютерные эксперименты, стохастическое моделирование, инфинитезимальные методы и т.п.

Результаты:

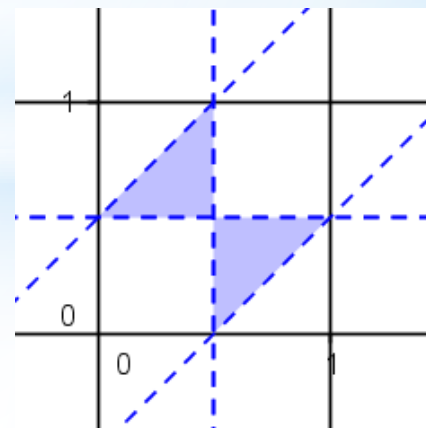
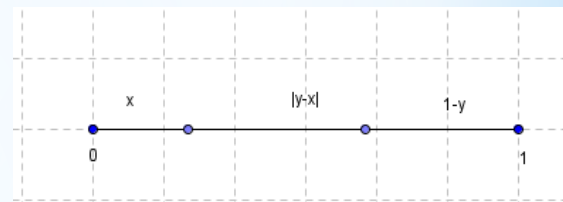
- 1) Способность к компьютерной визуализации мысленных экспериментов и их результатов.
- 2) Способность к использованию компьютерных экспериментов в качестве вспомогательного средства для расширения возможностей мысленного экспериментирования.
- 3) Способность использования компьютерных экспериментов в качестве средства выхода за пределы возможностей, определяемых уровнем теоретических знаний.

Примеры заданий для старшей школы

Пример 11. Отрезок АВ случайным образом делится двумя точками М и N на три части. Определить вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.



Гипотеза: $p = 0.25$



Примеры заданий для старшей школы

Пример 10. Расположите данные функции в порядке убывания скорости их возрастания на плюс бесконечности: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^{10}$, $y = 2^x$.

Этап 1. Сравнение скоростей изменения пар функций $y = x$ и $y = x^3$, $y = x$ и $y = x^{10}$, $y = x$ и $y = 2^x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)' < \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)'; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)' < \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{10})'; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)' < \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x)';$$

Этап 2. Сравнение скоростей изменения пары $y = x^3$ и $y = x^{10}$.

Теорема.

«Пусть даны две бесконечно больших на $+\infty$ функций $f(x)$ и $g(x)$ одного знака. Если

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, то $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $g(x)$. Если

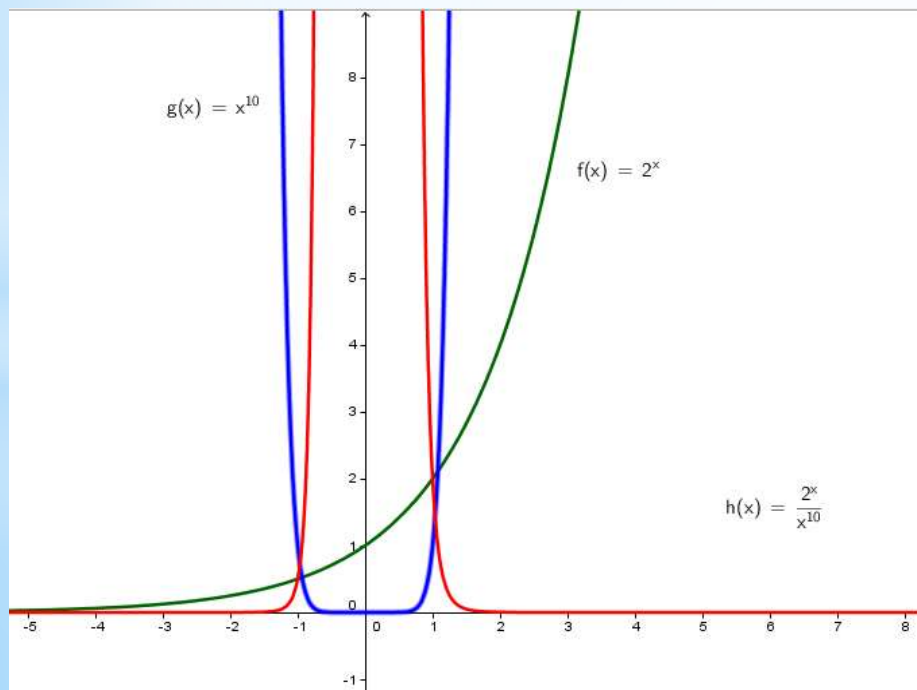
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M \neq 0$, то функции имеют одинаковый порядок роста. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то функция $g(x)$ имеет более высокий порядок роста».

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{10}} = 0 \Rightarrow (x^3)' < (x^{10})'$$

Примеры заданий для старшей школы

Пример 10. Расположите данные функции в порядке убывания скорости их возрастания на плюс бесконечности: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^{10}$, $y = 2^x$.

Этап 3. Сравнение скоростей изменения пар функций $y = x^{10}$ и $y = 2^x$; $y = x^3$ и $y = 2^x$ — аналитически неразрешимая задача для учащихся старшей школы.

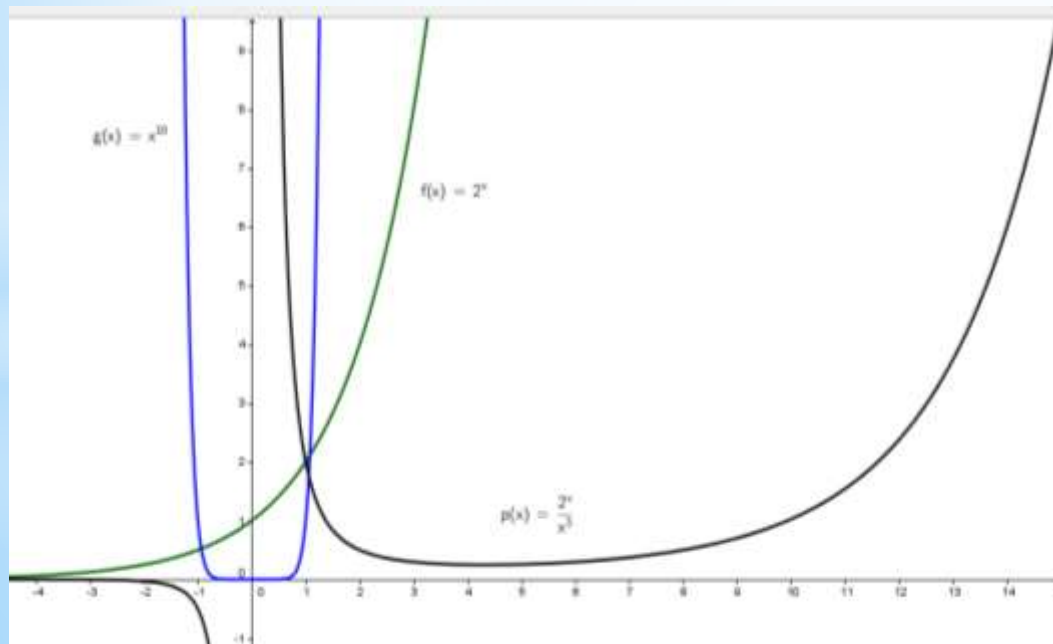


$$\Rightarrow (x^{10})' > (2^x)'$$

Примеры заданий для старшей школы

Пример 10. Расположите данные функции в порядке убывания скорости их возрастания на плюс бесконечности: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^{10}$, $y = 2^x$.

Этап 3. Сравнение скоростей изменения пар функций $y = x^{10}$ и $y = 2^x$; $y = x^3$ и $y = 2^x$ — аналитически неразрешимая задача для учащихся старшей школы.



$$\Rightarrow (x^3)' < (2^x)'$$

Принципы содержательного наполнения линии экспериментальной математики

Принцип функциональной значимости – включение в школьный курс лишь тех знаний об использовании экспериментального подхода в математике, которые значимы для ее изучения (в соответствии с идеями исследовательского обучения в математике)

Принцип функциональной полноты – включение в школьный курс такого комплекса знаний об экспериментальном подходе в математике, который обеспечит готовность учащихся к саморегуляции деятельности по использованию экспериментальных методов в рациональном сочетании с теоретическими.

Принцип предметной обусловленности – использование для развития содержания линии тех возможностей, которое предоставляет методика обучения содержанию основных линий школьного курса математики.

Принцип комплексности источников - использование в качестве источников содержания линии образцов реализации экспериментального подхода к математике, которые предоставляются научными данными, опытом деятельности создателей учебников и учителей.

Спасибо за внимание!