Просвещение

Школьный учебник: прошлое и настоящее. Проблема выбора

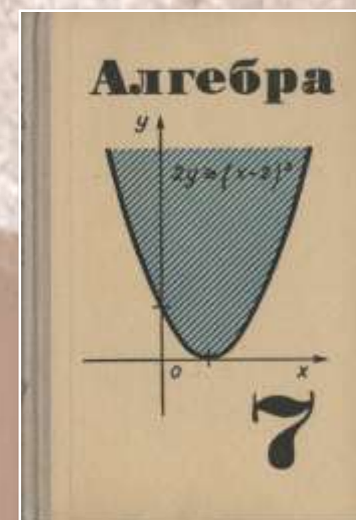
издательство Просвещение


А. П. Киселев
ГЕОМЕТРИЯ
Н. РЫБКИН
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ
ЧАСТЬ I
ПЛАНИМЕТРИЯ
ДЛЯ 6-9 КЛАССОВ СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ
А. Н. БАРСУКОВ
АЛГЕБРА
ЧАСТЬ II
П. А. ЛАРИЧЕВ
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ
ЧАСТЬ I

1966 год – первый вариант новой программы

Андрей
Николаевич
Колмогоров

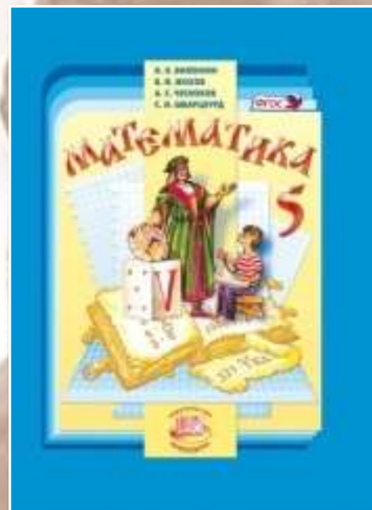
Алексей
Иванович
Маркушевич

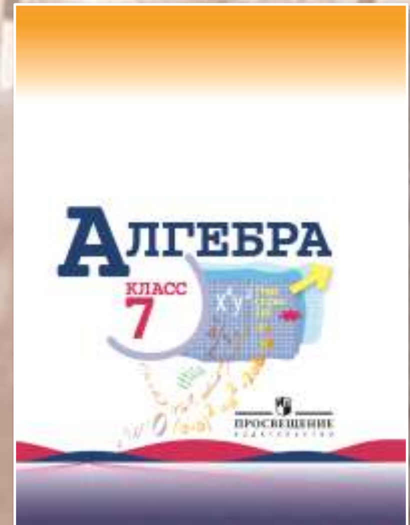


Учебный план 1 – 10 классы

6 6 6 | 7/6 6 6 6 5 | 6/5 6/5

План РФ / План СССР
60 / 57





Наум Яковлевич Виленкин

Юрий Николаевич Макарычев

1970 год – создание параллельных учебников

1982 год – внедрение

Андрей Николаевич Тихонов

Учебный план
***1 – 10* классы**

6 6 6	6 6 6 6 6	5 5/4
4 6 6 6	6 6 6 6 6	5 5/4

1970 58 / 57

1985 64 / 55

2015 59 / 51

1988 – Всесоюзный конкурс учебников

Из *73* рукописей были отобраны*:*

Математика*, 5 – 6*
- учебник Э.Р. Нурка и др. *(2-я премия)*
- учебник Н.Я. Виленкина и др. *(3-я премия)*
- учебник Л.Н. Шеврина и др. *(3-я премия)*

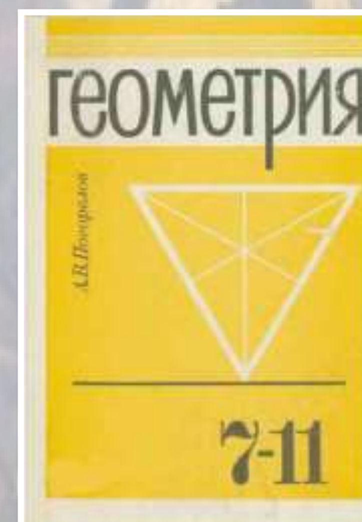
Алгебра*, 7 – 9*
- учебник Ю.Н. Макарычева и др. *(2-я премия)*
- учебник Ш.А. Алимова и др. *(3-я премия)*
- учебник Д.К. Фаддеева и др. *(3-я премия)*

Геометрия*, 7 – 9*
- учебник Л.С. Атанасяна и др. *(1-я премия)*
- учебник А.В. Погорелова *(2-я премия)*
- учебник А.Д. Александрова и др. *(3-я премия)*

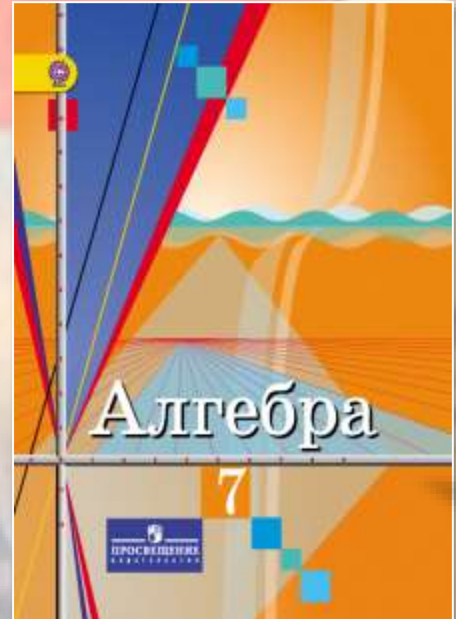
Алгебра и начала анализа*, 10 – 11*
- учебник М.И. Башмакова *(2-я премия)*
- учебник А.Н. Колмогорова и др. *(2-я премия)*
- учебник Ш.А. Алимова и др. *(3-я премия)*

Геометрия*, 10 – 11*
- учебник Л.С. Атанасяна и др. *(2-я премия)*
- учебник А.В. Погорелова *(2-я премия)*
- учебник Г.П. Бевза и др. *(3-я премия)*

Алексей Васильевич Погорелов




Геометрия
7
8
9
ПРОСВЕЩЕНИЕ


Алгебра
7
ПРОСВЕЩЕНИЕ


А. В. Погорелов
ГЕОМЕТРИЯ
7-9
ПРОСВЕЩЕНИЕ

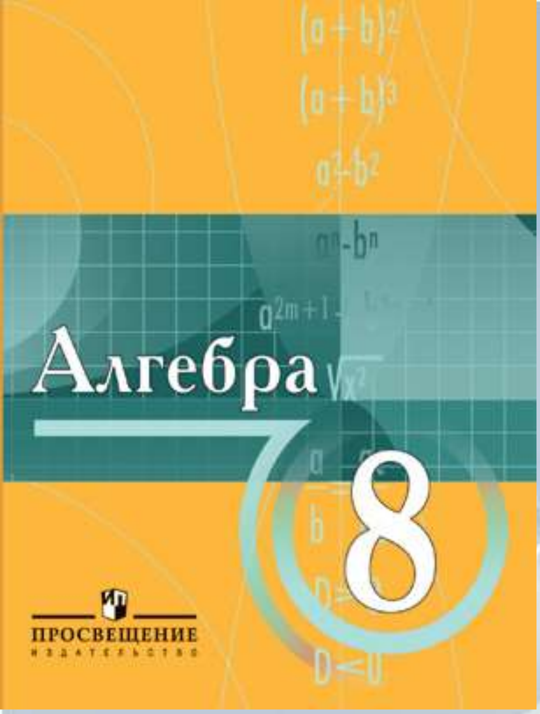

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
Геометрия
10
11
ПРОСВЕЩЕНИЕ


Алгебра
и начала
математического
анализа
10-11


А. В. Погорелов
ГЕОМЕТРИЯ
10-11
ПРОСВЕЩЕНИЕ

Н. Я. Виленкин

Александр Данилович Александров


Алгебра
8
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

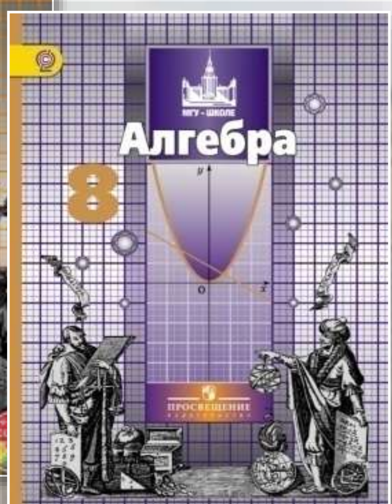

Алгебра
9
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО


А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
Геометрия
10
ПРОСВЕЩЕНИЕ


А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
Геометрия
11
ПРОСВЕЩЕНИЕ

МГУ – школе

Сергей Михайлович Никольский



МАТЕМАТИКА, АЛГЕБРА , НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С.М. Никольский и др.

Г.В. Дорофеев и др.

Ю.Н. Макарычев и др.

Ю.М. Колягин и др.

М.Я. Пратусевич и др.

Ш.А. Алимов и др

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГЕОМЕТРИЯ

Ходот Т.Г. и др.
Наглядная геометрия
5, 6 классы

Александров А.Д. и др.
Геометрия 7, 8, 9

Бутузов В.Ф. и др.
Геометрия 7,8,9

Панчищина В.А. и др.
Наглядная геометрия
5-6 классы

Погорелов А.В.
Геометрия 7-9

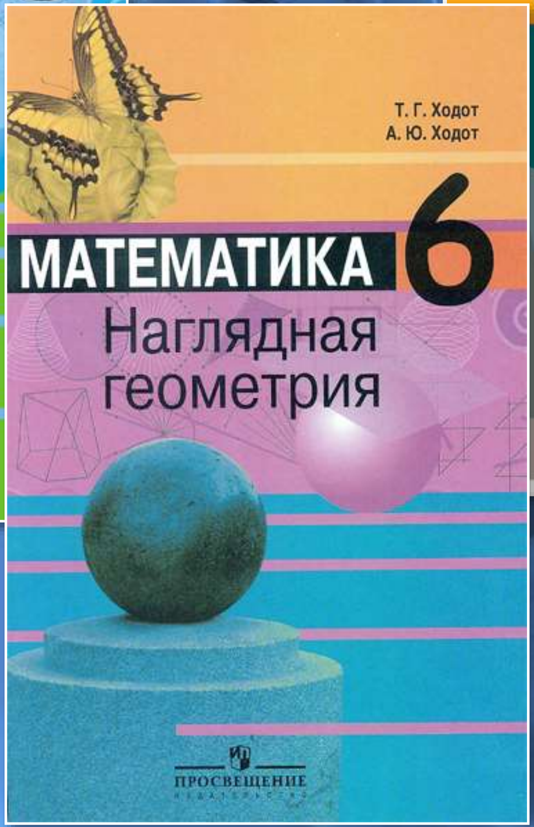
Атанасян Л.С. и др.
Геометрия 7-9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство

Создание и совершенствование нового поколения учебных пособий, в том числе в электронной форме, направленных на развитие навыков применения математики и на развитие математических знаний

1. **Наглядные систематические курсы геометрии для 5-6 классов для снятия трудностей изучения курса 7-9 классов**
2. **Связь с жизнью**
3. **Формирование различных познавательных универсальных действий.**
4. **Многоуровневые учебники**

Пропедевтические курсы по геометрии



Трудности геометрии 7–11

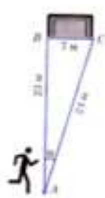
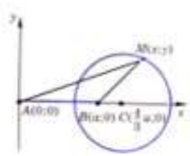
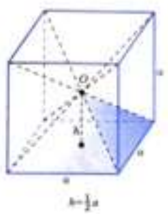
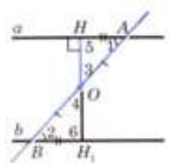
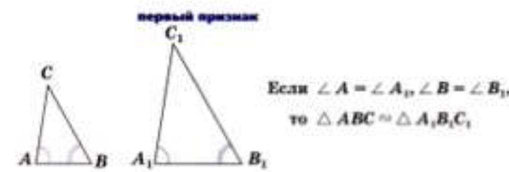
- **Абстракции** (объект, понятие)

  Примеры: *точка, прямая, касание, преобразование, вектор, «отображается на себя», средняя линия, хорда, объём…*

- **Научный язык** (словарь, фразеология)

  Примеры:
  - *диагональ, перпендикуляр, гипотенуза, биссектриса, параллелепипед, признак, свойство, коллинеарность*
  - *подобные фигуры, попарно пересекающиеся прямые, для любых..., ...и притом только один*
  - *Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.*

- **Условность обозначений** (рисунок, чертёж, схема, формула)

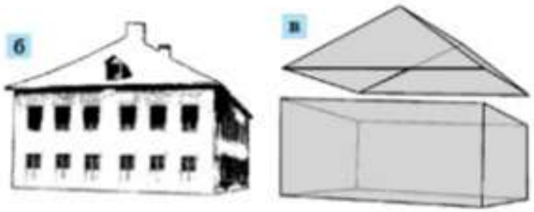







- **Пространственное мышление**

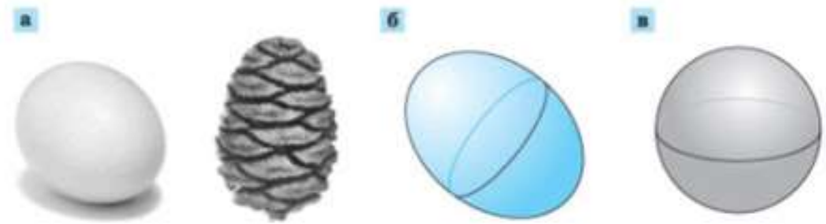
- **Математическая логика** (аксиоматическое построение, доказательство)

Формирование первичных абстракций

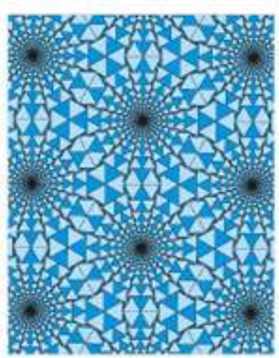
Объект

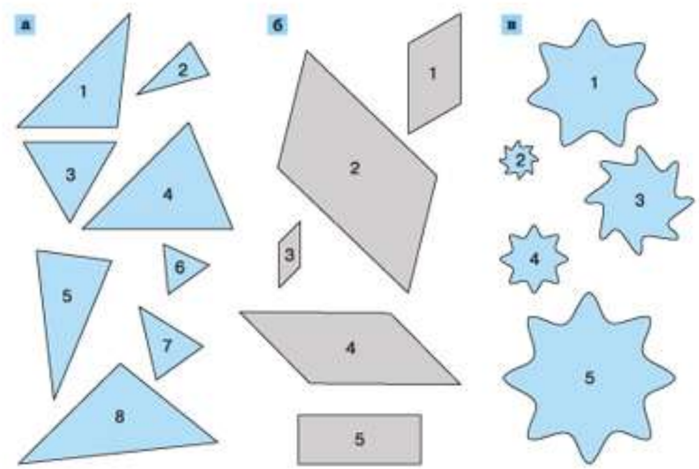


Геометрическая фигура — это мысленный образ предмета, лишённый всех свойств этого предмета, кроме формы, размеров и взаимного расположения его деталей.



Понятие





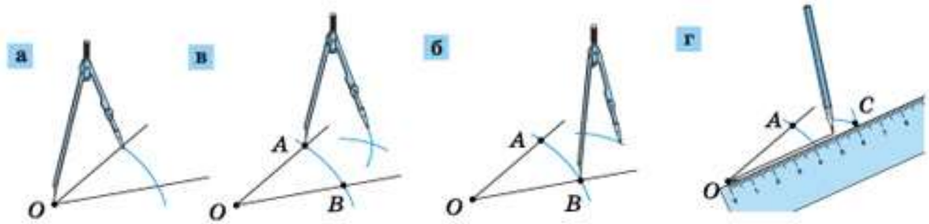
7-11

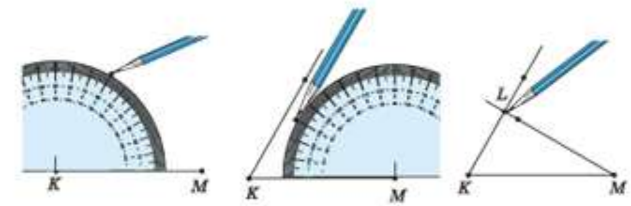
Условность обозначений

5-6

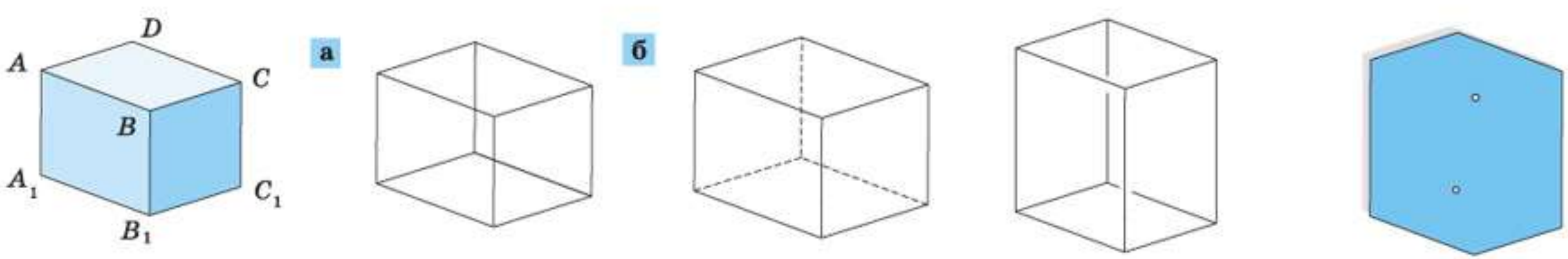
Освоение графических способов передачи информации

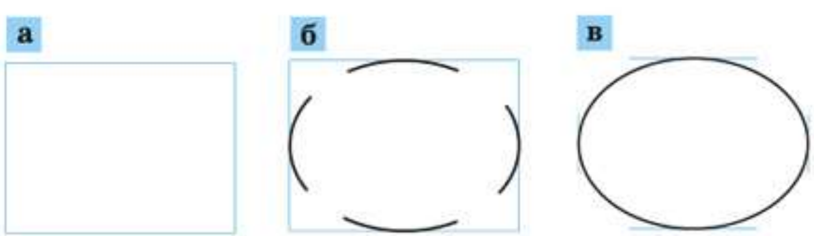
иллюстрация — «инструктор»

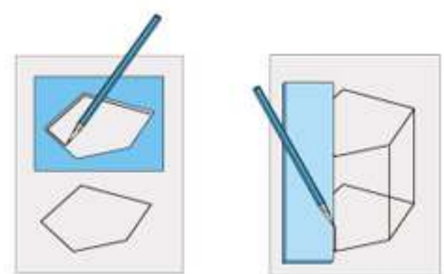




обучение созданию изображений



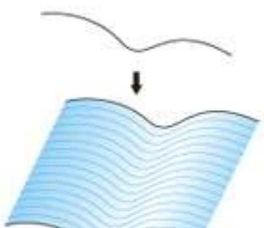




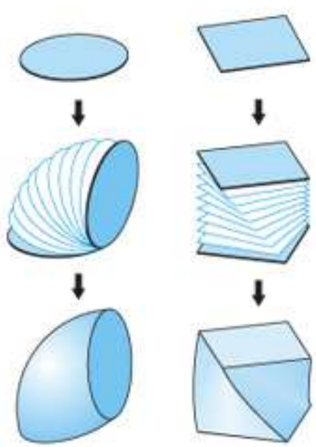
Пространственное мышление

создание динамических образов

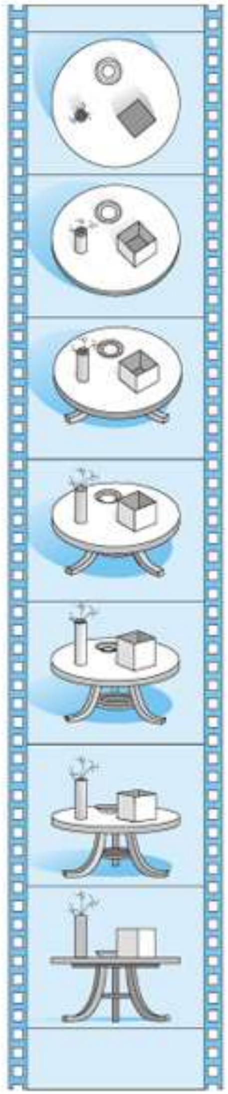
линия

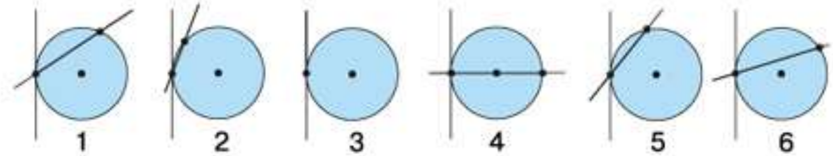


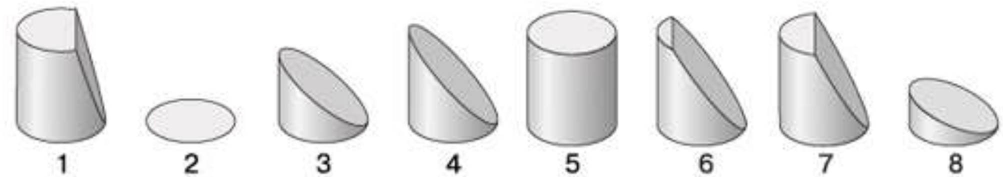
поверхность



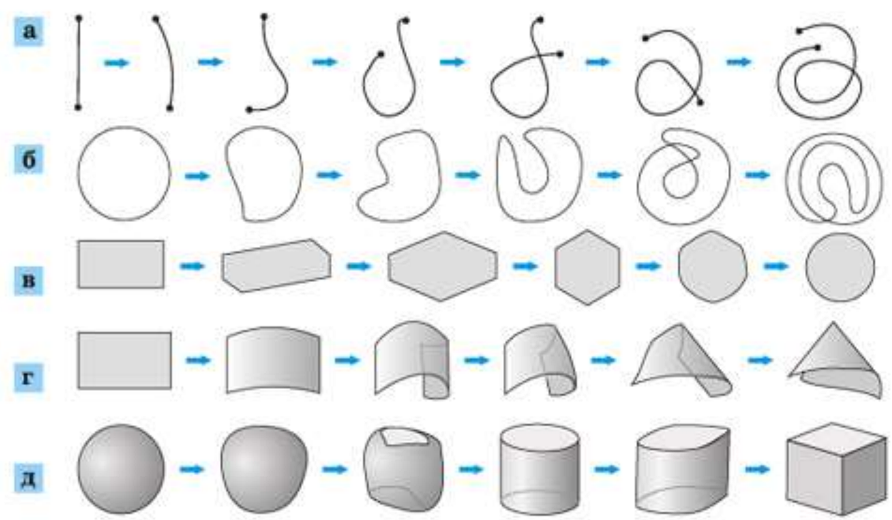
тело







Определи закономерность и расставь картинки в соответствии с этой закономерностью

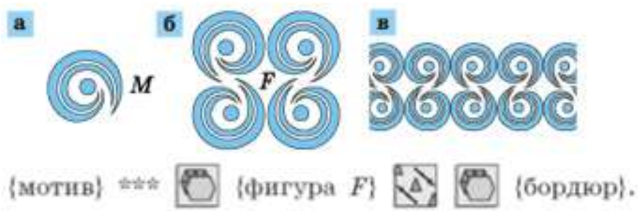


Тематические блоки общекультурного значения

понятие классификации

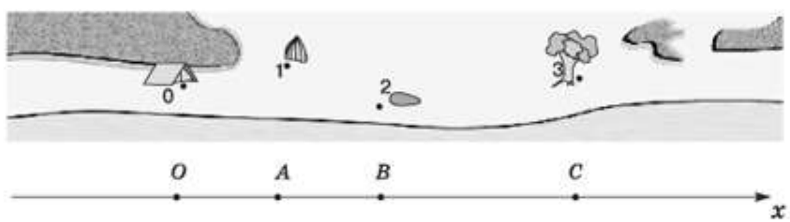
Классификация фигур или предметов — это разделение их по группам (по классам) так, чтобы каждый предмет попал только в какой-нибудь один класс.

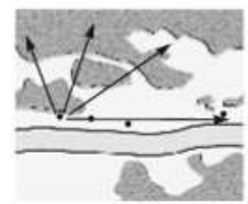
алгоритмы

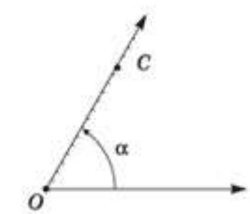


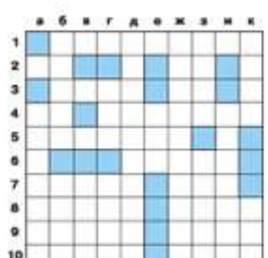
23.6*. Какие из следующих алгоритмов при определённом выборе векторов переносов, осей симметрий и центров поворотов могут привести к одному результату:

координаты

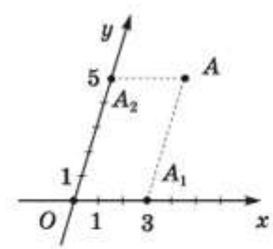








C:/documents/geom5-6/g6/coord.doc



Связь с жизнью

Учебники В.Ф.Бутузова, С.Б.Кадомцева, В.В.Прасолова

Перпендикуляр — от латинского perpendicularis (отвесный).

Докажем теорему о существовании перпендикуляра к прямой.

ТЕОРЕМА

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой.

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (рис. 56, *а*). Докажем, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a. Мысленно перегнем плоскость по прямой a (рис. 56, *б*) так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. При этом точка A наложится на некоторую точку. Обозначим ее буквой B. Разогнем плоскость и проведем через точки A и B прямую.

Пусть H — точка пересечения прямых AB и a (рис. 56, *в*). При повторном перегибании плоскости по прямой a точка H останется на месте. Поэтому луч HA наложится на луч HB, и, следовательно, угол 1 совместится с углом 2. Таким образом, $\angle 1 = \angle 2$. Так как углы 1 и 2 — смежные, то их сумма равна 180°, поэтому каждый из них — прямой. Следовательно, отрезок AH — перпендикуляр к прямой a. Теорема доказана.

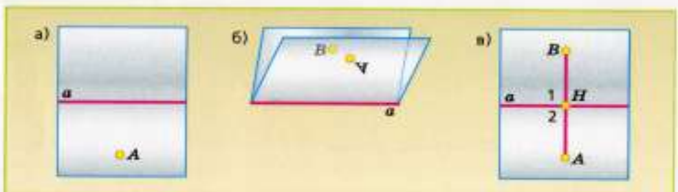


Рис. 56

Теорема — греческое слово θεώρημα, означающее рассматриваю, обдумываю.

Докажем теперь теорему о единственности перпендикуляра к прямой.

ТЕОРЕМА

Из точки, не лежащей на прямой, нельзя провести два перпендикуляра к этой прямой.

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (см. рис. 56, *а*). Докажем, что из точки A нельзя провести два перпендикуляра к прямой a. Предположим, что из точки A можно провести два перпендикуляра AH и AK к прямой a (рис. 57). Мысленно перегнем плоскость по прямой a так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. При перегибании точки H и K остаются на месте, точка A накладывается на некоторую точку. Обозначим ее буквой B. При этом отрезки AH и AK накладываются на отрезки BH и BK.

Углы AHB и AKB — развернутые, так как каждый из них равен сумме двух прямых углов. Поэтому точки A, H и B лежат на одной прямой и также точки A, K и B лежат на одной прямой.

Таким образом, мы получили, что через точки A и B проходят две прямые AH и AK. Но этого не может быть. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, из точки A нельзя провести два перпендикуляра к прямой a. Теорема доказана.

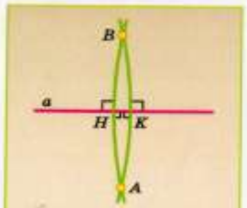


Рис. 57

Замечание 1. Теоремы о существовании и о единственности перпендикуляра к прямой можно объединить в одну теорему:

- **из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.**

Теперь, исходя из формул (1), дадим определения синуса и косинуса угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$:

- **синусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$ называется число $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$;**
- **косинусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$ называется число $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$.**

Согласно данному определению для $\alpha = 90°$ получаем:

$$\sin 90° = 2\sin 45°\cdot\cos 45° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

$$\cos 90° = 2\cos^2 45° - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Определим теперь $\sin 180°$ и $\cos 180°$, исходя снова из формул (1):

$$\sin 180° = 2\sin 90°\cdot\cos 90° = 2\cdot 1\cdot 0 = 0,$$
$$\cos 180° = 2\cos^2 90° - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Далее, используя формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 180°$ получаем:

$$\sin(180° - \alpha) = 2\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = 2\cos^2\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 =$$
$$= 2\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = -\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = -\cos\alpha.$$

Таким образом, для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 180°$ справедливы равенства

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (2)$$

как и формулы п. 68, они называются <u>формулами приведения</u>.

Из них, в частности, следует, что синус тупого угла положителен и меньше 1, а косинус тупого угла отрицателен и больше –1. Итак,

- **синус острого, прямого и тупого углов положителен, синус развёрнутого угла равен нулю;**
- **косинус острого угла положителен, прямого угла равен нулю, а косинус тупого и развёрнутого углов отрицателен.**

Из выведенных формул следует также, что для любого α из промежутка $0° < \alpha \leqslant 180°$ имеет место основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

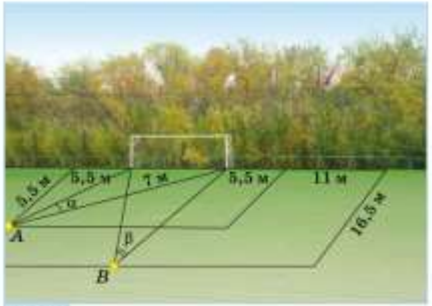


Рис. 124

14. Наблюдатель устанавливает вертикально шест и отходит от него так, чтобы при взгляде на вершину отвесной скалы она была на одной прямой с верхним концом шеста. Вычислите высоту горы, если известны расстояние от шеста до скалы, расстояние от шеста до наблюдателя, высота шеста и расстояние от глаз наблюдателя до земли.

15. **Годичный параллакс звёзд.** В астрономии **годичным параллаксом** звезды называют угол, под которым виден с неё отрезок, соединяющий Землю и Солнце (имеется в виду средняя за год величина такого угла, потому что при вращении Земли вокруг Солнца он меняется). Впервые такой угол удалось измерить немецкому астроному и математику Фридриху Бесселю (1784—1846) в 1838 г. для звезды 61 в созвездии Лебедя, и по его измерениям он оказался равным 0,314″. (Согласно современным измерениям параллакс этой звезды равен 0,292″). Радиус орбиты Земли (т. е. расстояние от Земли до Солнца) астрономы научились измерять очень давно, а если известны этот радиус и углы α и β на рисунке 125, то можно вычислить расстояние от Земли до звезды (отрезки AC и BC на рисунке 125). Выведите формулу, выражающую длины отрезков AC и BC через радиус орбиты Земли и углы α и β.

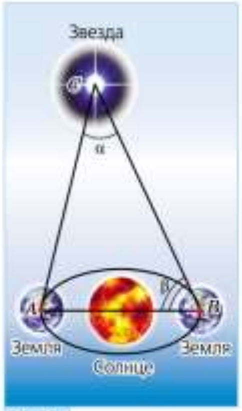


Рис. 125

Проектные задачи

Проектные задачи выполняются с использованием учебно-методического комплекта «Живая математика».

Глава 4

1. а) Научитесь строить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.
   б) Нарисуйте треугольник ABC, проведите биссектрисы углов B и C и отметьте их точку пересечения.
   в) Через точку пересечения биссектрис углов B и C треугольника ABC проведите прямую, параллельную прямой BC, и отметьте точки P и Q, в которых эта прямая пересекает стороны AB и AC.
   г) Сравните длину отрезка PQ и сумму длин отрезков BP и CQ. Подвигайте вершины треугольника ABC и убедитесь, что равенство $PQ = BP + CQ$ при этом сохраняется.

2. а) Нарисуйте треугольник, проведите биссектрисы его углов и отметьте точку пересечения биссектрис.
   б) Проведите перпендикуляр из точки пересечения биссектрис к одной из сторон.
   в) Проведите окружность, вписанную в треугольник.
   г) Скройте все вспомогательные объекты, оставив только треугольник и вписанную в него окружность.

3. а) Нарисуйте треугольник и постройте середины его сторон.
   б) Проведите серединные перпендикуляры к сторонам и отметьте их точку пересечения.
   в) Проведите окружность, описанную около треугольника.
   г) Скройте все вспомогательные объекты, оставив только треугольник и описанную около него окружность.

Глава 5

4. а) Отметьте три точки A, B и C, проведите отрезки AB и BC, затем проведите через точку A прямую, параллельную прямой BC, а через точку C прямую, параллельную прямой AB.
   б) Отметьте точку D пересечения проведённых прямых и проведите отрезки AD и CD.
   в) Скройте прямые AD и CD, оставив только параллелограмм $ABCD$.

Исследовательские задачи

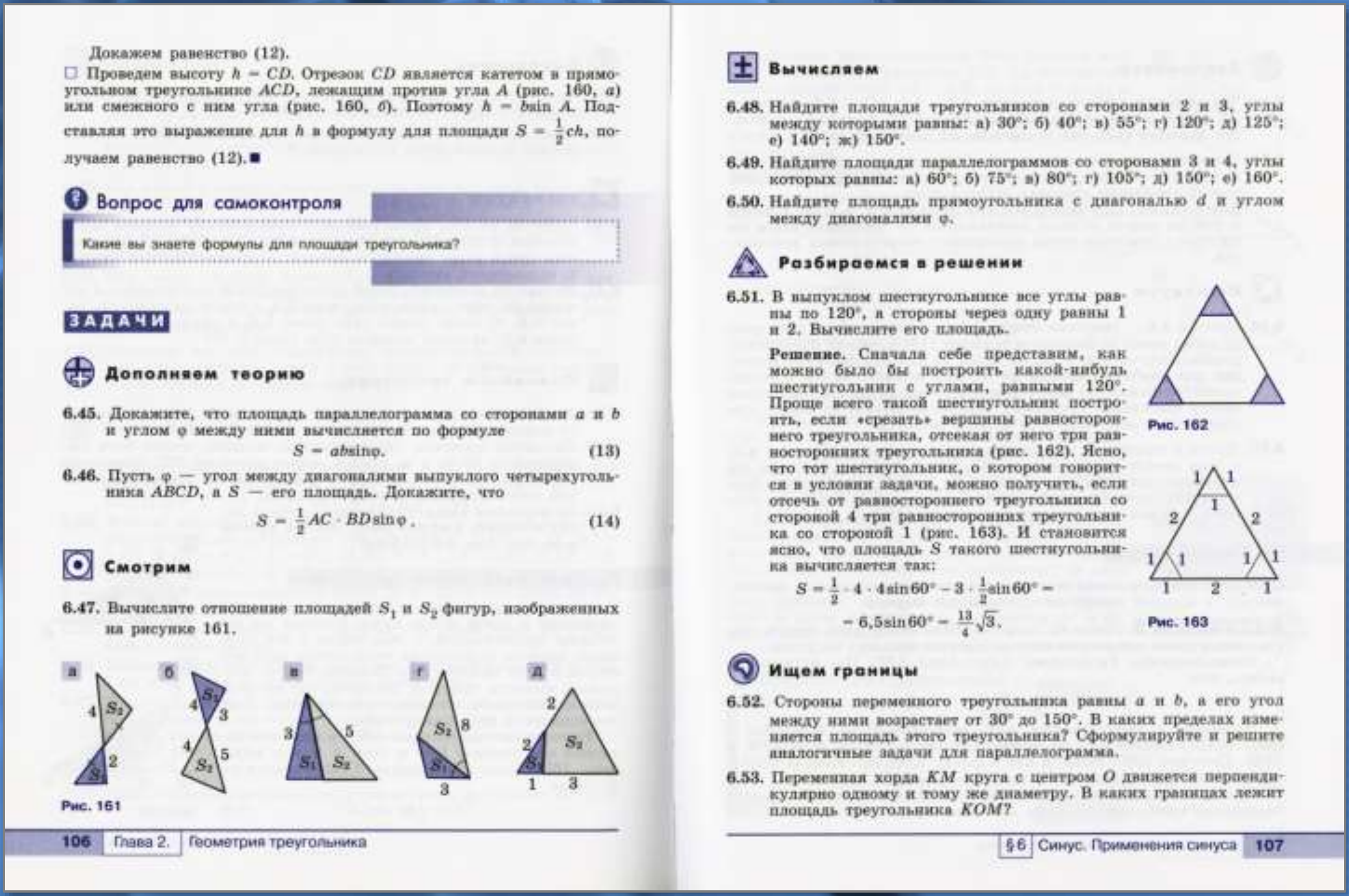
1. Придумайте такое условие параллельности двух данных прямых, которое является: а) необходимым, но не достаточным; б) достаточным, но не необходимым.
2. Исследуйте, при каком условии задача о построении треугольника: а) по трём медианам; б) по трём высотам имеет решение.
3. Постройте треугольник по углу A и сторонам AC и BC и исследуйте, при каком условии задача: а) имеет решение; б) имеет единственное решение; в) имеет два решения; г) не имеет решений.
4. Исследуйте, сколько различных точек может быть среди тех 9 точек, через которые проходит окружность Эйлера.
5. Выведите формулу стороны равностороннего треугольника в теореме Морли (см. задачу 280 на с. 132).

Темы рефератов и докладов

1. Вневписанные окружности.
2. Аксиома параллельных прямых и эквивалентные ей утверждения.
3. Чем геометрия Лобачевского отличается от геометрии Евклида.
4. Биография Н. И. Лобачевского.
5. Симметрия и орнаменты.
6. Симметрия в природе и в архитектуре.
7. Прямая и окружность Эйлера.
8. Признаки равенства треугольника по: а) трём медианам; б) трём высотам; в) трём биссектрисам.
9. Золотое сечение в природе, архитектуре и живописи.
10. Нестандартные признаки подобия треугольников.
11. Построения одним циркулем.
12. Прямая и обратная теоремы, необходимость и достаточность.
13. Методы решения задач на построения (метод ГМТ, метод подобия).
14. Теорема Чевы и следствия из неё: теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис, высот.

Формирование познавательных универсальных действий

Учебники А.Д.Александрова, А.Л.Вернера, В.И.Рыжика



Докажем равенство (12).

□ Проведем высоту $h = CD$. Отрезок CD является катетом в прямоугольном треугольнике ACD, лежащим против угла A (рис. 160, *а*) или смежного с ним угла (рис. 160, *б*). Поэтому $h = b\sin A$. Подставляя это выражение для h в формулу для площади $S = \frac{1}{2}ch$, получаем равенство (12). ■

Вопрос для самоконтроля

Какие вы знаете формулы для площади треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.45. Докажите, что площадь параллелограмма со сторонами a и b и углом φ между ними вычисляется по формуле

$$S = ab\sin\varphi. \qquad (13)$$

6.46. Пусть φ — угол между диагоналями выпуклого четырехугольника $ABCD$, а S — его площадь. Докажите, что

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi. \qquad (14)$$

Смотрим

6.47. Вычислите отношение площадей S_1 и S_2 фигур, изображенных на рисунке 161.

Рис. 161

106 Глава 2. Геометрия треугольника

Вычисляем

6.48. Найдите площади треугольников со сторонами 2 и 3, углы между которыми равны: а) 30°; б) 40°; в) 55°; г) 120°; д) 125°; е) 140°; ж) 150°.

6.49. Найдите площади параллелограммов со сторонами 3 и 4, углы которых равны: а) 60°; б) 75°; в) 80°; г) 105°; д) 150°; е) 160°.

6.50. Найдите площадь прямоугольника с диагональю d и углом между диагоналями φ.

Разбираемся в решении

6.51. В выпуклом шестиугольнике все углы равны по 120°, а стороны через одну равны 1 и 2. Вычислите его площадь.

Решение. Сначала себе представим, как можно было бы построить какой-нибудь шестиугольник с углами, равными 120°. Проще всего такой шестиугольник построить, если «срезать» вершины равностороннего треугольника, отсекая от него три равносторонних треугольника (рис. 162). Ясно, что тот шестиугольник, о котором говорится в условии задачи, можно получить, если отсечь от равностороннего треугольника со стороной 4 три равносторонних треугольника со стороной 1 (рис. 163). И становится ясно, что площадь S такого шестиугольника вычисляется так:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sin 60° - 3 \cdot \frac{1}{2}\sin 60° = 6{,}5\sin 60° = \frac{13}{4}\sqrt{3}.$$

Рис. 162

Рис. 163

Ищем границы

6.52. Стороны переменного треугольника равны a и b, а его угол между ними возрастает от 30° до 150°. В каких пределах изменяется площадь этого треугольника? Сформулируйте и решите аналогичные задачи для параллелограмма.

6.53. Переменная хорда KM круга с центром O движется перпендикулярно одному и тому же диаметру. В каких границах лежит площадь треугольника KOM?

§ 6 Синус. Применения синуса 107

Разбираемся в решении

Ученикам даются не только готовые доказательства, но и показывается, как ищут эти доказательства.
Решения задач рубрики формируют:

- *рефлексию способов и условий деятельности,*
- *контроль и оценку процесса и результатов деятельности.*

Дополняем теорию

Даются теоретические положения, полезные при решении других задач.
Решения задач рубрики формируют:

- *установление причинно-следственных связей,*
- *построение логической цепи рассуждений,*
- *доказательство.*

Смотрим

Задачи развивают пространственные представления (двумерные и трёхмерные)
Решения задач рубрики формируют:

- *поиск и выделение необходимой информации*

Рисуем

Задачи развивают пространственное мышление в активной форме, динамические пространственные представления

Решения задач рубрики формируют:

- *пространственно-графическое моделирование*.

Представляем

Задачи развивают пространственное мышление

Решения задач рубрики формируют:

- *умение выдвигать гипотезы*.

Работаем с формулой

Задачи развивают навыки алгебраических преобразований, помогают выявить функциональную зависимость между геометрическими величинами.

Решения задач рубрики помогают понять как:

- *осуществить синтез – оставления целого из частей,*
- *установить причинно-следственные связи.*

Планируем

Учимся составлять алгоритм, ведущий к решению задачи.
При выполнении заданий рубрики осуществляется

- *установление причинно-следственных связей,*
- *построение логической цепи рассуждений,*
- *постановка и формирование проблемы,*
- *самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера*.

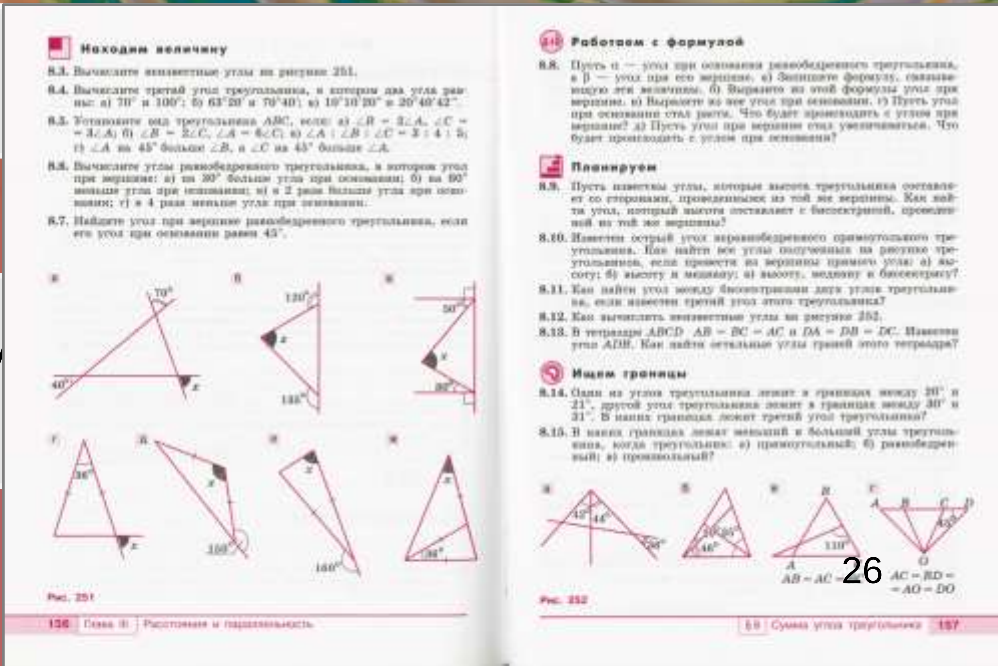
Находим величину

Задачи на вычисление

Ищем границы

Решения задач рубрики формиру

- *выдвигать гипотезы*.



Строим

При решении задач рубрики происходит:

- *анализ с поиском пути решения*,
- *синтез* (само построение),
- *доказательство*,
- *исследование*.

Рассуждаем

Задачи на:

- *чистую логику*,
- *подведение под понятие*,
- *построение примеров и контрпримеров*.

Участвуем в олимпиаде

Занимательная геометрия

Применяем геометрию

Формирование познавательных универсальных действий

Учебники С.М.Никольского, М.К.Потапова, Н.Н.Решетникова, А.В.Шевкина

437. Внутри развёрнутого угла AOB проведены два луча OD и OC так, что $\angle AOC = 130°$, а $\angle DOB = 120°$. Найдите $\angle DOC$.

438. Прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 79). Углы AOC и BOD называют **вертикальными**. Назовите другую пару вертикальных углов. Чему равна сумма величин углов 1 и 3? Чему равна сумма величин углов 3 и 2? Верно ли, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2$? Верно ли, что $\angle 1 = \angle 2$? Верно ли утверждение: **вертикальные углы равны**?

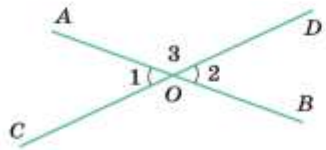


Рис. 79

439. При пересечении двух прямых образовалось четыре угла. Определите величины этих углов, если один из них:
а) в 5 раз больше другого; б) на 40° больше другого.

Исследуем

440. **Касательной к окружности** называют прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку. Эту точку называют **точкой касания**. На рисунке 80 изображены окружность с центром O, касательная AB и радиус окружности OC. C — точка касания.
а) Определите углы, образованные касательной и радиусом окружности, проведённым в точку касания.
б) Покажите, как должны располагаться две окружности, чтобы они имели a общих касательных? Рассмотрите все возможные случаи: $a = 0, 1, 2, 3, 4$.

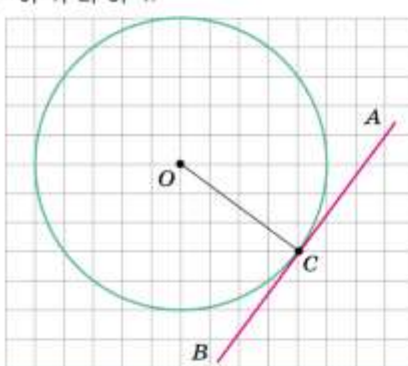


Рис. 80

515. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина которого 45 см, ширина 30 см, а высота 25 см. Сколько раз придётся наполнить водой трёхлитровую банку, чтобы уровень воды в аквариуме был равен 20 см?

516. Как изменится объём прямоугольного параллелепипеда, если:
а) его длину увеличить в 2 раза;
б) увеличить его длину в 2 раза, а ширину — в 3 раза;
в) увеличить его длину в 2 раза, ширину — в 3 раза, а высоту — в 4 раза;
г) его длину увеличить в 4 раза, а ширину и высоту уменьшить в 2 раза?

517. Во сколько раз увеличится объём куба при увеличении его ребра: а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в 10 раз?

Ищем информацию

518. Найдите в справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:
а) Какую величину на Руси измеряли вёдрами?
б) Что измеряют галлонами? баррелями? В каких странах используются эти единицы измерения?
в) На ёмкостях иностранного производства иногда встречается такое обозначение объёма: 100 *cl* (100 сантилитров). Выразите этот объём в принятых в России единицах.

2.12. Единицы массы

Основная единица массы — **грамм**. Тысячу граммов называют **килограммом**:

$$1\ кг = 1000\ г.$$

Тысячу килограммов называют **тонной**:

$$1\ т = 1000\ кг.$$

Грамм — это масса 1 кубического сантиметра воды при температуре 4 °С. Значит, килограмм — это масса 1 кубического дециметра (литра) воды при 4 °С, а тонна — это масса 1 кубического метра воды при 4 °С.

Многоуровневые учебники

1. В учебниках для основной школы задача обеспечения запросов учащихся для обеспечения индивидуальной траектории осуществляется в основном через систему задач

2. В старшей школе многоуровневость присутствует и в теории, и в задачах

3. Структура подачи материала

Система задач

Учебники Г.В.Дорофеева и др.

4.22 Вычислите:
а) $90 \cdot 25 + 10 \cdot 25$; в) $23 \cdot 16 + 16 \cdot 27$;
б) $123 \cdot 27 - 23 \cdot 27$; г) $40 \cdot 87 - 39 \cdot 87$.

4.23 **Рассуждаем** Как вычислить значение выражения $29 \cdot 11 + 29^2$ с помощью распределительного свойства? Мы знаем, что степень можно записать в виде произведения, т. е. $29 \cdot 11 + 29^2 = 29 \cdot 11 + 29 \cdot 29 = \ldots$. Закончите вычисления.
Рассуждая так же, вычислите:
а) $37^2 + 37 \cdot 13$; б) $25^2 - 25 \cdot 15$.

Б

Действуем по алгоритму (4.24—4.25)

4.24 1) Разберите, как выполнено умножение на 15:

$$24 \cdot 15 = 24 \cdot (10 + 5) = $$
$$= 24 \cdot 10 + 24 \cdot 5 = 240 + 120 = 360.$$

Вы видите, что

$$24 \cdot 15 = 240 + 120 = 360.$$

Отсюда понятен приём умножения числа на 15: *к числу надо приписать 0 и к результату прибавить его половину.*
Например:

$$36 \cdot 15 = 360 + 180 = 540.$$

2) Пользуясь рассмотренным приёмом, вычислите:
а) $180 \cdot 15$; б) $32 \cdot 15$; в) $840 \cdot 15$; г) $56 \cdot 15$.

4.25 1) С помощью распределительного свойства вычислите произведение $27 \cdot 101$. Используя полученный результат, найдите короткий способ умножения двузначного числа на 101.
2) Найдите произведение:
а) $19 \cdot 101$; б) $25 \cdot 101$; в) $33 \cdot 101$.

4.26 Найдите значение выражения, дважды воспользовавшись распределительным свойством:
а) $22 \cdot 26 - 11 \cdot 26$; в) $43 \cdot 16 + 43 \cdot 13$;
б) $32 \cdot 26 - 11 \cdot 32$; г) $48 \cdot 11 + 48 \cdot 4$.
Образец. $43 \cdot 25 - 43 \cdot 13 = 43 \cdot (25 - 13) = 43 \cdot 12 = 43 \cdot (10 + 2) = 430 + 86 = 516$.

4.27 Вычислите удобным способом:
а) $12 \cdot 17 + 35 \cdot 13 + 17 \cdot 23$; в) $29 \cdot 25 + 15 \cdot 6 + 19 \cdot 15$;
б) $41 \cdot 80 - 25 \cdot 41 + 55 \cdot 29$; г) $26 \cdot 18 + 26 \cdot 17 + 14 \cdot 35$.

П

4.28 Даны числа: 526 000, 520 060, 5260, 5 260 000.
а) Расположите числа в порядке убывания.
б) На сколько наименьшее число меньше наибольшего?

5.21 **Работаем с символами** Запишите условие задачи с помощью символов. Решите задачу.
а) На рисунке 5.16 угол BAC равен 28°, а угол CAD равен 56°. Чему равна величина угла BAD?
б) На рисунке 5.17 угол BAC равен 136°, а угол BAD равен 56°. Чему равна величина угла CAD?

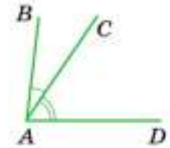


Рис. 5.16

5.22 Начертите в тетради полукруг. С помощью транспортира проведите радиусы так, чтобы они разделили его: а) на четыре равные части; б) на три равные части. Чему равна градусная мера угла каждой части?

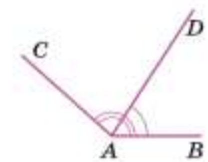


Рис. 5.17

5.23 **Ищем информацию** Помимо транспортира, существуют и другие инструменты, позволяющие измерять величины углов. Самые древние из них — это астролябия в астрономии (рис. 5,18, *а*), теодолит в геодезии (рис. 5.18, *б*). Найдите информацию об этих приборах в литературе или в Интернете.

а) б)

Астролябия *Старинный теодолит*

Рис. 5.18

Куранты на Спасской башне Московского Кремля

Рис. 5.19

Б

5.24 **Наблюдаем** а) Чему равен угол между часовой и минутной стрелками, если часы показывают 1 ч? 3 ч? 4 ч? 11 ч 30 мин (рис. 5.19)?
б) На сколько градусов поворачивается минутная стрелка часов за 15 мин, 30 мин, 1 ч? часовая стрелка за 1 ч, 30 мин, 10 мин?
в) Представьте, что часы показывают 10 ч. На сколько градусов изменится величина угла между стрелками через 1 ч?

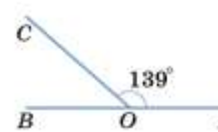


Рис. 5.20

5.25 **Рассуждаем** Угол AOC равен 139° (рис. 5.20). Найдите величину угла COB.

Структура подачи материала

Учебники Г.В.Дорофеева и др.

ГЛАВА 3

Действия с натуральными числами

Истоки арифметики — науки о числах — уходят в глубину тысячелетий. Ещё на папирусах Древнего Египта и глиняных табличках Древнего Вавилона можно было найти сведения не только о числах, но и о действиях с ними. И это понятно — одного счета предметов было мало, их количество менялось: увеличивалось и уменьшалось. Надо было научиться складывать и умножать, а ещё делать обратные им действия — вычитать и делить. Пришлось договориться и о том, как записывать эти действия. Конечно, сегодня арифметические действия можно выполнять не только в уме или на листе бумаги, у нас есть хорошие помощники — калькуляторы, компьютеры. Однако современному человеку всё равно очень нужны навыки счёта, умение оценить результат, выполнить прикидку — иначе из-за любой ошибки, сбоя техники могут возникнуть серьёзные проблемы.

3.1 Сложение и вычитание

Вы уже умеете складывать и вычитать числа. Числа, которые складывают, называют **слагаемыми**. Число, которое получается при сложении, называют **суммой**.

Если слагаемые обозначить буквами a и b, то их сумма запишется так:

$$a + b.$$

$$2 + 3 = 5$$

слагаемые *сумма*

Напомним, что число 0 обладает в действии сложения особым свойством:

Для любого числа a
$a + 0 = a$, $0 + a = a$.

Например, $12 + 0 = 12$, $0 + 425 = 425$, $1244 + 0 = 1244$.

Действие вычитания определяется на основе сложения. Например, вычесть из числа 8 число 3 — это значит найти такое число, которое в сумме с числом 3 даёт 8. Ясно, что это число 5:

$$8 - 3 = 5, \text{ так как } 5 + 3 = 8.$$

Кристаллы пирита

Кристаллы поваренной соли

Кристалл кварца

Обратите внимание: у многоугольника вершин столько же, сколько сторон, а у многогранника число вершин и число граней необязательно одинаково.

Многогранники не зря выделяют в отдельную группу: их создаёт сама природа, например в виде кристаллов. Однажды французский учёный, занимавшийся изучением минералов, Р. Ж. Гаюи уронил на пол кристалл кальцита. Кристалл разбился на множество кусочков. Учёный заметил, что все кусочки имеют одинаковую, геометрически правильную форму. Он предположил, что форма кристалла каждого минерала определяется формой «кирпичиков», которые его составляют. Так учёный разгадал одну из загадок природы и стал основателем новой науки — кристаллографии. Кристалл хорошо всем известной поваренной соли имеет форму куба, другие же кристаллы имеют и более сложные формы.

А вот примерами рукотворных кристаллов-многогранников могут служить бриллианты. С точки зрения геометрии современный бриллиант — это многогранник с 57 гранями.

Бриллиант

- У многогранника все части поверхности плоские. Поверхности каких геометрических тел, изображённых на рисунке 10.1, состоят не только из плоских частей? Какую форму имеют плоские части?
- Охарактеризуйте каждый многогранник (см. рис. 10.2) по плану: 1) число граней, их форма → 2) число рёбер → 3) число вершин → 4) число рёбер в каждой вершине.
- Сделайте из палочек и кусочков пластилина модель одного из многогранников (см. рис. 10.2).

Перспектива

Структура подачи материала

Учебники Ю.М.Колягина, М.В.Ткачёвой, Н.Е.Фёдоровой, М.И.Шабунина

Перед каждой главой расположено вступление к главе, в котором рассказывается учащимся о том, что им предстоит узнать при изучении главы, с какими понятиями они познакомятся, и с какой целью их стоит изучать

В начале каждого параграфа коротко отражены основные понятия, правила и алгоритмы, которые узнают учащиеся при его изучении

Перед основным текстом параграфа дана рубрика *«Нужно вспомнить»*, которая содержит перечень изученных понятий и правил для актуализации знаний учащихся

В конце каждого параграфа расположены *«Беседы с Профессором»* в которых персонажи мальчика Тёмы и девочки Светы задают вопросы Профессору и вместе с учащимися узнают полезные, интересные и занимательные сведенья из математики

Структура подачи материала

Неравенства

Сравнивать величины и количества при решении практических задач приходилось ещё с древних времён. Тогда же и появились такие слова, как *больше* и *меньше*, *выше* и *ниже*, *легче* и *тяжелее*, *тише* и *громче*, *дешевле* и *дороже* и т. д., обозначающие результаты сравнения однородных величин.

Понятия *больше* и *меньше* возникли в связи со счётом предметов, измерением и сравнением величин. Например, математики Древней Греции знали, что сторона любого треугольника меньше суммы двух других сторон и что против большего угла в треугольнике лежит бóльшая сторона. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых диаметра.

Символически записывать соотношения между числами и величинами с помощью знаков > и < начали лишь в XVII—XVIII вв. Например, вместо фразы «число a больше числа b» стали писать: $a > b$. Записи, в которых два числа соединены одним из знаков: > (больше), < (меньше), ⩾ (больше или равно), ⩽ (меньше или равно), стали называть *неравенствами*.

С числовыми неравенствами вы встречались и в младших классах. Знаете, что неравенства могут быть верными, а могут быть и неверными. Например, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ — верное числовое неравенство, а $0{,}23 > 0{,}235$ — неверное числовое неравенство.

Неравенства, в которые входят неизвестные, могут быть верными при одних значениях неизвестных и неверными при других. Например, неравенство $2x + 1 > 5$ верное при $x = 3$, а при $x = -3$ — неверное. Для неравенства с одним неизвестным можно поставить задачу: решить неравенство. Задачи решения неравенств на практике ставятся и решаются не реже, чем задачи решения уравнений. Например, многие экономические проблемы сводятся к исследованию и ре-

§ 4 Сложение и умножение неравенств

Вы знаете, что числовые равенства можно почленно складывать и умножать. В этом параграфе вы научитесь выполнять аналогичные действия с неравенствами. Умения почленно складывать и умножать неравенства часто применяются на практике. Эти действия помогают решать задачи оценивания и сравнения значений выражений.

Нужно вспомнить:

- свойства действий с рациональными числами;
- понятия неравенств одного знака и противоположных знаков;
- что означают неравенства $a > b$ и $a < b$;
- основные свойства числовых неравенств;
- формулы периметра и площади прямоугольника;
- неравенства треугольника.

При решении различных задач часто приходится складывать или умножать почленно левые и правые части неравенств. При этом иногда говорят, что неравенства складываются или умножаются. Например, если турист прошёл в первый день более 20 км, а во второй — более 25 км, то можно утверждать, что за два дня он прошёл более 45 км. Точно так же если длина прямоугольника меньше 13 см, а ширина меньше 5 см, то можно утверждать, что площадь этого прямоугольника меньше 65 см².

При рассмотрении этих примеров применялись следующие **теоремы о сложении и умножении неравенств**:

ТЕОРЕМА 1 При сложении неравенств одинакового знака получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

● По условию $a - b > 0$ и $c - d > 0$. Рассмотрим разность

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Так как сумма положительных чисел положительна, то $(a + c) - (b + d) > 0$, т. е. $a + c > b + d$. ○

Примеры:

1) $$+\begin{array}{r} 3 > 2{,}5 \\ 5 > 4 \\ \hline 8 > 6{,}5 \end{array}$$

2) $$+\begin{array}{r} 1{,}2 < 1{,}3 \\ -3 < -2 \\ \hline -1{,}8 < -0{,}7 \end{array}$$

Структура подачи материала

После основного текста параграфа расположены **устные вопросы и задания**, позволяющие закрепить теоретические знания изученного параграфа и **вводные упражнения**, помогающие учащимся актуализировать знания для выполнения упражнений из раздела *«Упражнения»*.

Упражнения в свою очередь разделены на **три уровня** сложности.

В конце каждой главы расположены **упражнения к главе, старинные задачи, практические и прикладные задачи, «Проверь себя»** на трёх уровнях

Логическим заключением каждой главы служат разделы **«Итог изучения главы» и «Темы исследовательских работ».** Их содержание позволяет учащимся самостоятельно обобщить свои знания. А также расширить и углубить их за счёт проведения исследовательской работы на предложенную тему

Структура подачи материала

Задача 5. Доказать, что $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$, если $\frac{n}{m}$ — правильная дробь.

► Напомним, что дробь $\frac{n}{m}$ называется правильной, если $n < m$ (n и m — натуральные числа). Разность $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ меньше нуля, так как $n - m < 0$, $m > 0$, $m + 1 > 0$. Следовательно, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Привести пример сравнения числовых значений величин в практической деятельности человека.
2. В каком случае говорят, что:
   1) число a больше числа b; 2) число a меньше числа b?
3. Что означает неравенство: $m > n$; $m < n$?
4. Что значит сравнить числа a и b?
5. Как на числовой прямой изображаются числа p и q, если: $p < q$; $p > q$?
6. Пояснить, почему $a^2 - 2a + 1 > 0$ при $a \neq 1$.

Вводные упражнения

1. (Устно.) Сравнить числа:
   1) $\frac{8}{15}$ и $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{8}$;
   4) 0,351 и 0,3501; 5) $1\frac{3}{7}$ и $-1\frac{3}{7}$; 6) −5,409 и −5,709.
2. Какое из данных чисел расположено на числовой оси левее:
   1) 1,25 или 1,26; 2) −3,78 или −3,08?
3. Объяснить, почему $a^2 - (1 + 2a^2) < 0$ при любом a.

Упражнения

28. Используя определение числового неравенства, сравнить числа:
   1) 0,3 и $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ и 0,3; 3) $\frac{13}{40}$ и 0,35; 4) $-\frac{5}{8}$ и −0,7.

Разговор о важном

Приложение свойств неравенств

Профессор, в начале параграфа было сказано, что действия с неравенствами имеют большое практическое значение. А Вы можете привести такой пример?

Пожалуйста. В торговле при перевозке товаров часто решают задачу оптимального использования грузоподъёмности транспорта. К примеру, имея автомобиль грузоподъёмностью 5 т, поставщик товаров решает такую задачу: «Можно ли за один рейс на этой машине перевезти 7 ящиков, масса каждого из которых меньше 300 кг, и ещё 13 ящиков, масса каждого из которых меньше 200 кг?»

Я попробую решить эту задачу. Во-первых, массы всех ящиков я выражу в тоннах, чтобы сравнивать их с грузоподъёмностью машины: 300 кг = 0,3 т, 200 кг = 0,2 т. Пусть масса ящика первого вида $m < 0{,}3$, а масса ящика второго вида $n < 0{,}2$. Тогда масса 7 ящиков первого вида $7 \cdot m < 7 \cdot 0{,}3$, т. е. $7m < 2{,}1$. Масса 13 ящиков второго вида $13 \cdot n < 13 \cdot 0{,}2$, т. е. $13n < 2{,}6$. Сложив почленно неравенства $7m < 2{,}1$ и $13n < 2{,}6$, получим, что $7m + 13n < 4{,}7$, т. е. такой груз гарантированно можно перевезти на 5-тонной машине.

А я бы поставщику товаров подсказал, что он может за этот рейс перевезти ещё один ящик любого вида, так как масса груза всё равно в этом случае будет меньше 5 т.

Шаг вперёд

Оценка суммы

В прошлом году, когда вы изучали алгебраические дроби, я показывал вам некоторые искусственные приёмы нахождения сумм большого числа слагаемых. Помните, мы находили сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ и показали, что она равна $\frac{99}{100}$.

Я помню, мы заменяли каждое слагаемое исходной суммы вида $\frac{1}{k(k+1)}$ разностью $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. После этого

Структура подачи материала

В этой главе вы узнали,

что такое:

1) абсолютная погрешность приближения;
2) граница абсолютной погрешности;
3) точность измерения;
4) округление чисел;
5) относительная погрешность приближения;
6) стандартный вид числа;
7) верные, строго верные и сомнительные цифры;
8) порядок и мантисса числа;

как:

1) оценивать точность приближения;
2) применять правило округления чисел;
3) выполнять действия сложения, вычитания, умножения и деления с приближёнными числами;
4) выполнять простейшие вычисления на инженерном микрокалькуляторе (в том числе находить степень числа и число, обратное данному).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Представить дробь $\frac{4}{9}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

2. Записать в стандартном виде число 44,301; 0,483.

3. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{348}{27}+34\cdot78$.

II уровень

4. Представить дробь $\frac{3}{7}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

5. Записать в стандартном виде число 74 580; 0,0026; $3\frac{7}{125}$.

6. Найти значение $x+y$, если $x\approx2{,}48$, $y\approx5{,}6$.

7. Найти значение $x\cdot y$, если $x\approx9{,}038$, $y\approx0{,}26$.

8. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{1}{0{,}48}+3{,}79\cdot0{,}34$.

III уровень

8. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=63,\\ x-y=-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=2,\\ 2x^2-y^2+2x-y=4.\end{cases}$

9. При каких значениях a уравнение $ax^2-2ax-a+2=0$ имеет один корень?

10. Корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ являются числа x_1 и x_2. Составить уравнение, корнями которого являются числа $x_1+\frac{1}{x_2}$ и $x_2+\frac{1}{x_1}$.

11. Решить уравнение $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$.

12. При делении двузначного числа на произведение его цифр в частном получится 2, а в остатке — 5. При делении числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке — 3. Найти это число.

13. Решить систему уравнений $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12},\\ 4x^2+9y^2=5.\end{cases}$

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Решение квадратных уравнений в Древнем Вавилоне.
2. Квадратные уравнения в трудах Диофанта.
3. Квадратные уравнения в индийских трактатах.
4. Квадратные уравнения в трудах ал-Хорезми.
5. Исторические задачи на составление и решение квадратных уравнений.
6. Теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степеней.
7. Квадратные уравнения в задачах физики и геометрии.
8. Различные методы решения систем уравнений.
9. Уравнения и системы уравнений в задачах экономики.

Структура подачи материала

Содержание учебников С. М. Никольского и др. для 10-11 классов

10 класс

Учебник содержит три главы:

I. Корни, степени, логарифмы.

II. Тригонометрические формулы. Тригонометрические функции.

III. Элементы теории вероятностей.

11 класс

Учебник содержит три главы:

I. Функции. Производные. Интегралы.

II. Уравнения. Неравенства. Системы.

III. Комплексные числа.

Структура подачи материала

14.26* а) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x-2y)} = 9 \\ \log_3(x-2y) + \log_3(x+2y) = 1 + 2\log_3 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(2x+y)} = 25 \\ \log_5(2x-y) + \log_5(2x+y) = 1 + 2\log_5 3. \end{cases}$

14.3. Метод замены неизвестных

В некоторых случаях с введением новых неизвестных система сводится к системе, которую можно решить изложенными выше методами. Метод замены неизвестных основан на следующем утверждении, которое мы приведем только для систем двух уравнений с двумя неизвестными.

8. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} f(\alpha(x; y), \beta(x; y)) = 0 \\ g(\alpha(x; y), \beta(x; y)) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и пусть система

$$\begin{cases} f(u; v) = 0 \\ g(u; v) = 0 \end{cases}$$

имеет k различных решений: $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_2)$, ..., $(u_k; v_k)$. Тогда множество решений системы (1) есть объединение всех решений каждой из k систем:

$$\begin{cases} \alpha(x; y) = u_1 \\ \beta(x; y) = v_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha(x; y) = u_2 \\ \beta(x; y) = v_2, \end{cases} \ldots, \quad \begin{cases} \alpha(x; y) = u_k \\ \beta(x; y) = v_k. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[4]{x+y} = \log_3 9x \\ 2\sqrt[4]{x+y} = \log_3 \dfrac{27}{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем замену неизвестных: $u = \sqrt[4]{x+y}$, $v = \log_3 x$. Так как $\log_3 9x = 2 + \log_3 x$, $\log_3 \dfrac{27}{x} = 3 - \log_3 x$, то получим систему

$$\begin{cases} 3u = 2 + v \\ 2u = 3 - v. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = 1$, $v = 1$. Поэтому на основании утверждения 8 система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \sqrt[4]{x+y} = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3), а значит, и система (2) имеют по единственному решению (3; −2).

Ответ. (3; −2).

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7. \end{cases} \quad (4)$$

Сделав замену неизвестных: $u = 3^{\frac{x}{2}}$, $v = 2^{\frac{y^2}{2}}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 77 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u+v) = 77 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 2. \end{cases}$$

По утверждению 8 система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} = 9 \\ 2^{\frac{y^2}{2}} = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5), а значит, и система (4) имеют по два решения: $(4; \sqrt{2})$ и $(4; -\sqrt{2})$.

Ответ. $(4; \sqrt{2})$; $(4; -\sqrt{2})$.

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x = y^2 - y \\ y^4 - 2y^3 + y = x^2 - x. \end{cases} \quad (6)$$

Сделав замену неизвестных: $u = y^2 - y$, $v = x^2 - x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} v^2 - v = u \\ u^2 - u = v. \end{cases} \quad (7)$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим систему

$$\begin{cases} v^2 - v = u \\ u^2 - v^2 = 0, \end{cases}$$

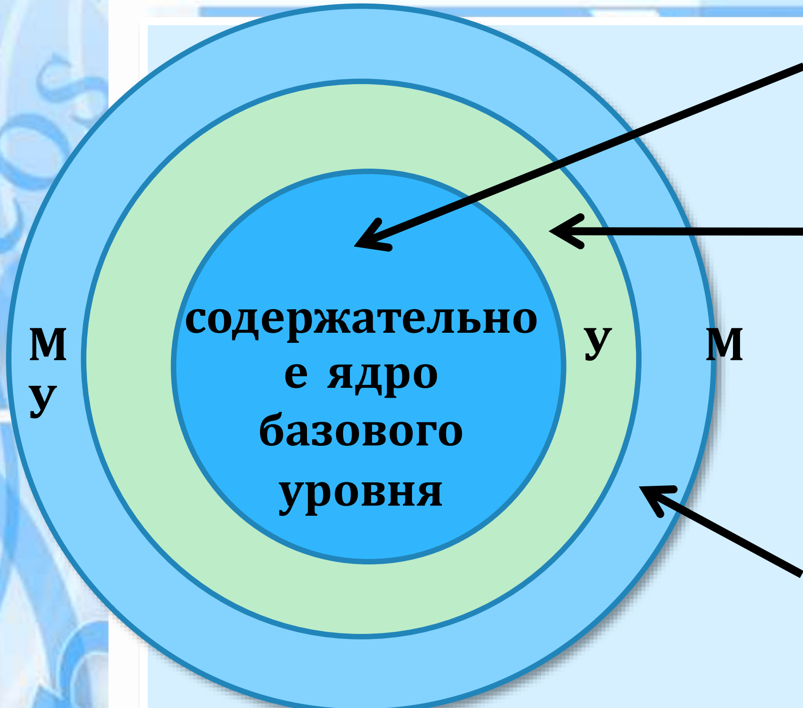
равносильную системе (7). Из второго уравнения следует, что либо $v = u$, либо $v = -u$. Следовательно, множество всех решений системы (7) есть объединение множеств решений двух систем:

$$\begin{cases} v^2 - v = v \\ v = u \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v^2 - v = -v \\ v = -u. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 2$, а вторая — одно решение: $u_3 = 0$, $v_3 = 0$. Это означает, что

Структура подачи материал

Учебник Ю.М.Колягина и др.



Базовый уровень
для всех учащихся

Углублённый уровень
для учащихся
естественнонаучных,
и экономических

Математический уровень
для учащихся
физико-математических
направлений

Система упражнений

Состав: **(**около **20 000** заданий**)**

в Учебниках		в Дидактических материалах		в Тематических тестах
около ***700*** задач с образцам и решений	порядка ***10 000*** задач и упражнений для работы в классе и дома	более ***300*** примеров с решениям и	более ***2000*** заданий для самостоятел ьной работы	около ***7000*** вопросов и заданий

*Структура на **4** уровнях сложности*

- к каждому параграфу учебника
- к каждой главе
- ко всему курсу
- задания для контроля и самоконтроля по каждой теме

Структура подачи материала

Содержание учебников М. Я. Пратусевича и др.

10 класс	11 класс
Глава 1. Введение	**Глава 8.** Предел и непрерывность функции
Глава 2. Целые числа	**Глава 9.** Производная и её применение
Глава 3. Многочлены	**Глава 10.** Определённый интеграл
Глава 4. Функция. Основные понятия	**Глава 11.** Комплексные числа
Глава 5. Корень. Степень. Логарифм	**Глава 12.** Элементы теории вероятностей
Глава 6. Тригонометрия	**Глава 13.** Уравнения и неравенства
Глава 7. Предел последовательности	**Глава 14.** Повторение

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Притча из книги Адольфа Ферьера, педагога-гумманиста XIX столетия

«И сотворили школу так, как велел им (людям) дьявол.

Ребёнок любит природу, поэтому его замкнули в четырёх стенах.

Ребёнку нравится сознавать, что его работа имеет какой-то смысл, поэтому всё устроили так, чтобы его активность не приносила никакой пользы.

Он не может оставаться без движения — его принудили к неподвижности.

Он любит работать руками, а его стали обучать теориям и идеям.

Он любит говорить — ему приказали молчать.

Он стремится понять — ему велели учить наизусть.

Он хотел бы сам искать знания — ему они даются в готовом виде…

И тогда дети научились тому, чему они никогда бы не научились в других условиях. Они научились лгать и притворяться. И вот что произошло. Как и хотел того дьявол, некоторые люди зачахли, стали вялыми и пассивными, утратили всякий интерес к жизни. Они лишились счастья и здоровья. Пропали Любовь и Доброта. Мысли стали сухими и серыми, души зачерствели, сердца озлобились.»

И прошло более ста лет…

Просвещение

Спасибо за внимание

tburmistrova@prosv.ru

издательство Просвещение